目白大学　総合科学研究
６号　2010年３月　149－158

モンティ・ホール問題における最尤法
Maximum Likelihood Method in the Monty-Hall Problem

菊池　耕士
（Kikuchi Kohshi）

Abstract :
The present report treats the Monty-Hall problem, which is related to the basis of probability theory. By illustrating several answers to the problem, we uncover the vagueness in the foundation of probability theory, which may urge one to try to settle an axiomatic system for making a unified understanding of phenomena in the classical dynamical world. The understanding of the Monty-Hall problem in this report is basically by the view of our measurement theory which has been formulated with the influence of Born-Heisenberg theory in quantum mechanics. From the viewpoint of this theory, I make a trial to set a fundamental or a theoretical base for the Monty-Hall problem and statistics.

キーワード：モンティ・ホール問題，測定理論，フィッシャーの最尤法
Key Word：Monty-Hall problem, Measurement theory, Fisher's maximum likelihood method

本稿では，モンティ・ホール問題（[1]）を取り上げる．この問題は雑誌のクイズコラムで取り上げられた確率に関する一見シンプルなものであるが，確率論の根幹に関わる問題点を提起している．かつてアインシュタイン（Albert Einstein）が「神はサイコロを振らない」として慎重な姿勢を示したように，確率という考え方には「曖昧さ」が内包されている．この曖昧さのためか，確率論は現象理解の統一的な扱いがし難く，各問題毎に確率の概念の解釈が行われてきたように思われる．

モンティ・ホール問題は，古くから有名な「３囚人の問題」と同じ構造を持つ問題である．それにもかかわらず，この３囚人の問題を理解しているはずの確率の専門家たちが，改めてモンティ・ホール問題に出会って，一から議論し直さなくてはいけなかったことからも，確率という概念が明確には定まっていないと言えるのではないだろうか．

現代の我々は，ボルン（Max Born）やハイゼンベルグ（Werner Heisenberg）達による量子力学での測定の概念を知っている．石川はこの量子測定の概念の古典化を行うことで測定理論を提案した（[2]）．筆者や石川はその理論体系によって，種々の古典世界における現象への統一的理解を目指してきた（[3]，[4]，[5]，[6]）．これは，種々の現象を量子力学同様に統一的な言葉で記述し，測定の概念とシステム間の関係の概念という二つの柱で理解しようとするものである．つまり，ボルンによる測定の概念とハイゼンベルグやシュレディンガー（Erwin Schrödinger）によるシステム間のルールである(1)．本稿では，古典世界にこの測定の概念を導入することで，モンティ・ホール問題や従来の確率概念の整理を行う．

１章でモンティ・ホール問題を紹介するとともに，現在その問題になされている解釈の幾つかを述べる．

２章では，モンティ・ホール問題で種々の解釈がなされている状況を通してその因は「従来

きくちこうし：社会学部メディア表現学科助手

の確率概念の認識の曖昧さ」であることを浮かび上がらせてみたい.

３章で最尤法によるモンティ・ホール問題の理解を新たに提案する．この最尤法の考え方は，確率や推定の概念を扱う上で基本的なものである．それにも関わらず，確率・統計の理論としての整備が不徹底のためか，今まで当問題にこの最尤法という概念が適用されて来なかった．そこで，我々の測定理論に基礎を置く体系認識の見方から，モンティ・ホール問題，そしてこの問題を通して見える確率概念の整理を行いたい.

また，７章ではボルンの測定の公理として筆者による数学的表現を与えている．測定理論そのものは既に［2］,［5］,［6］などで述べられているものであるが，ここでは，写像・位相空間・測度空間・加法的集合関数・ファイバーバンドルと言った数学用語を用いることで，新たに表現しなおすものである.

1　モンティ・ホール問題

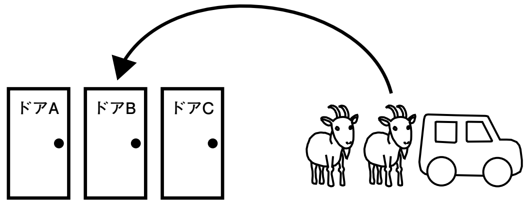
モンティ・ホール問題は，1990年に雑誌「Parade magazine」でマリリン・ヴォス・サバント（Marilyn vos Savant）によるクイズ・コラム「マリリンに聞く（Ask Marilyn)」で取り上げられたものである（[1]）．この問題は，当時テレビの人気番組「Let's make a deal」に端を発する確率問題である．ちなみに，この番組の名物司会者モンティ・ホール（Monty Hall）の名がこの問題の名前の由来になっている．問題は次の通りである.

ゲーム１（モンティ・ホール問題）．スタジオには，番組のホスト（モンティ）と一人のゲストがいる．ゲストの前に，３つのドア（ドアＡ，Ｂ，Ｃ）が用意されている．そのうちの１つのドアの後ろにはアタリとして豪華な車が，他の２つのドアの後ろにはハズレのヤギが隠れている.

このゲームは，ゲストが３つのドアから１つのドアを選択し，アタリの車を引き当てたら「勝ち」とするゲームである.

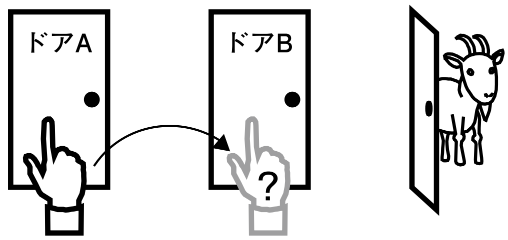
ゲストにはドアの後ろが見えていないので，

図１



アタリを選ぶ確率はどのドアも等しくなると考えられる．しかし，ゲストが最初の選択を行った後，ホストがヒントとして，選ばれていない他の２つのドアのうち１つを開け，ハズレのヤギを見せる．そして，残っているもう１つのドアに選び替えても良いと提案する．問題は，このときゲストが「ドアの選択を変更する」ことと,「はじめのドアのままで選択を変えない」ことのどちらが確率的に良いのだろうかというものである.

図２

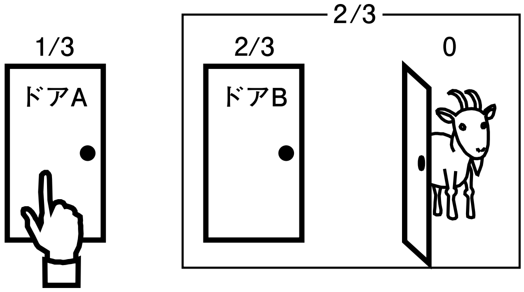


「残ったドアは２つで，アタリは共に半々の確率になるから選択を変えても変えなくても同じ」と直感で答える人が多いのではないかと思う．しかし，この問題に対するマリリンによる結論は「扉を変更する方がよい」である．その説明は次の通りである.

解答１． 例えば，ゲストが最初に選択したドアをＡとし，ホストが開けたドアをＣとする.「ゲストがはじめに選んだドアＡがアタリである確率」は1/3である．そのとき,「残りの２つのドア（ＢとＣ）のうちのどちらかにアタリがある確率」は１−1/3，つまり，2/3である.

ここで，ホストがドアＣを開けてハズレを見せた段階で，当然ドアＣのハズレが確定する．つまり，「ドアＣがアタリである確率」は０になり，「残ったドアＢがアタリである確率」は2/3となる．

図３

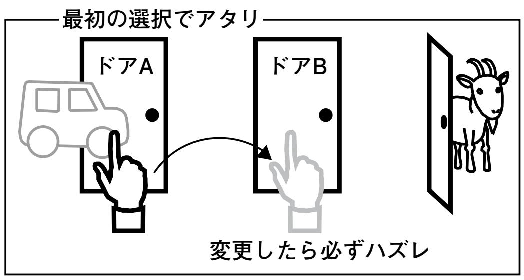


よって，はじめに選んだドアＡがアタリである確率の1/3より，ドアＢがアタリである確率の2/3の方が高いことになる．よって，「ホストのヒントをもらったのちは，選択を変更した方が良い」ことになる．

また，この問題に多くの検討がなされるにつれ，次のような解答も出てきている．

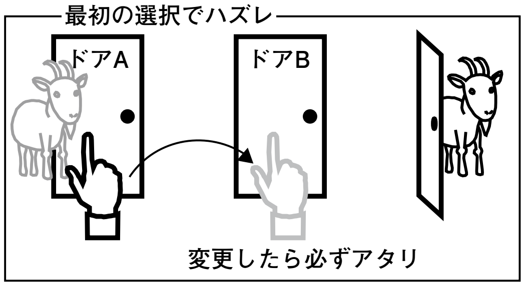
解答２．ゲストが最初にアタリのドアを選んでいた場合，選択を変更してしまうと必ずハズレになる（０の確率でアタリになる）．

図４



逆に，最初にハズレのドアを選んでいた場合，もう１つのハズレはホストによって開けられることになるので，選択を変更すると必ずアタリになる（１の確率でアタリになる）．

図５



ゲストが最初の選択でアタリを選ぶ確率は1/3で，最初の選択でハズレを選ぶ確率は2/3 であるので，

「選択を変更することで当たる確率」

$$= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

となる．よって，「選択を変更することで当たる確率2/3」の方が「選択を変更しないで当たる確率1/3」より高いので，「選択を変更した方が良い」という結論が得られる．

このように解答を与えられると，この問題は簡単に見えるのであるが，実際にはこのクイズには確率論の重要な問題点が隠されている．雑誌でのマリリンの説明（彼女の説明は解答１の書き方であった）に対し，読者から彼女の答えは誤りだとする反対意見が約一万も寄せられたとのことである．その中には，20世紀を代表する数学者エルデス（Paul Erdös）を含む多くの大学教授もいたとのことであるから，当時の盛り上がりが如何に大きかったか分かるのではなかろうか．

上記の解答に対し，彼らが納得がいかなかったのは何故だったのか，改めて考え直してみたい．

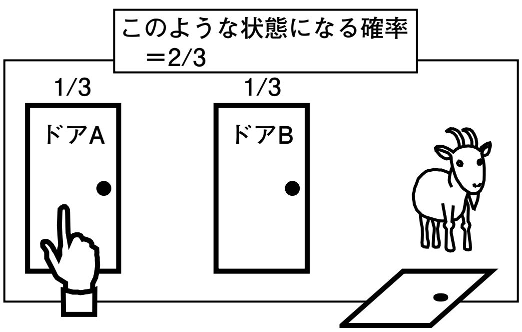
この問題で，初めからハズレのドアが１つ開いた状態で，２つのドアからどちらか１つを選ぶというものであったとしてみよう．その場合，当然のことながらどちらのドアを選んでもアタリとなるのは1/2の確率である．それに対

しこの問題のように，１つの選択がなされた後でホストがドアを１つ開けた場合は，アタリの確率はそれぞれ1/3と2/3になる．どちらの場合でも二択の問題であることに変わりがないはずなのに，「どのような過程でドアが２つになったか」をゲストが知っているかによって確率が変わると言うことになる．この現象を補足するために，次の例を考えてみよう．

ゲーム２．ゲーム１と全く同じ条件下で，３つの中からゲストはドアＡを選択した．そのときスタジオでアクシデントが発生して，偶然ドアＣが倒れてヤギが見えてしまった．しかし，ホストは元々ヒントとしてドアＢとＣのどちらかを開ける予定であったので，ドアＣを開けたままゲームを続行することとした．この時，ゲストはドアＢへ選択を変更した方が良いのだろうか．

ホストの意志によってハズレのドアが開けられたのではなく，たまたま，ハズレのドアが倒れたとしているのが，モンティ・ホール問題との違いである．結論から言うと，この問題の答えは「変更しても，変更しなくても同じ」である．元々，ドアＡ，Ｂ，Ｃ，それぞれがアタリである確率は1/3である．従って「運良くハズレのドアＣが倒れるという確率」は2/3となる．そのうちの半分，つまり，1/3の確率でドアＡに，残りの半分の1/3の確率でドアＢにアタリがあることになると考えられるからである．

図６



よって，このゲーム２では，1/3と1/3を比べて「変更してもしなくても同じ」という結論が得られる．

ゲーム２からも分かるように，「『ゲストが最初に選ばなかったドアの残りのうち１つ』からヤギが現れるという結果」そのものではなく，その「ヤギが現れる経緯」が大切となる．

ホストがドアの後ろを知らずに，適当にドアを開けていたとすると，ゲーム１はゲーム２と全く同じになってしまう．そのことからも分かるように，「ホストがドアの後ろを知っている」ということがモンティ・ホール問題において重要であると言える．

さらに言えば，「ホストがドアの後ろを知っている」だけではなく，「『ホストがドアの後ろを知っている』ことをゲストが知っている」ことが必要になる．この前提なしでは，ゲストにとって条件が定まっていないのと同じであり，ゲーム２同様「変更しても，変更しなくても同じ」が答えになってしまう．

マリリンによる最初の説明では，このことが明確にされていなかった．そのため，多くの読者が，彼女の解答は誤っていると投書したことは決しておかしなことではなかったのである．

ここで，モンティ・ホール問題の厳密な理解を行うために，ゲームのルールを整理しておく．

ゲームの条件

1．３つのドア｛A，B，C｝に｛車，ヤギ，ヤギ｝がランダムに入っている．
2．ゲストはドアを１つ選ぶ．
3．ホストはヒントとして残りのドアのうち１つを開ける．
4．ホストは車のあるドアを知っていて，必ずヤギの入っているドアを開ける．
5．残ったドアが両方ともヤギだった場合には，ホストは無作為に（1/2の確率で）どちらかのドアを開ける．

ゲームの条件１.～５．をゲストが知っている．

以降，モンティ・ホール問題をこのルールのもとに検討していく．

２．事前・事後確率

モンティ・ホール問題は「ホストがドアの後ろを知っているか否か」が明確にされていなかったことから，大きな混乱を与えてきた．しかし，前章で述べたように，ゲームの条件が整えられてからも，「ゲストが何もしていないのに確率だけが勝手に変わっていく」ことに納得がいかない人が多く残ったのである．例えばエルデスもその中の一人である（[7]）．

そこで，モンティ・ホール問題が何故これほどまで議論されてきたのかという背景について説明したい．

ゲームの解答で，はじめの選択でアタリを選ぶ確率を1/3としているが，その意味がどういうものか考えてみたい．条件１でドアの後ろがランダムに決められているので，最初の選択でアタリを選ぶ確率は，1/3となると考えられる．

しかし，ここで重要なのは，アタリを選ぶのは1/3の確率としているが，これはドアの後ろを知らないゲストだけの話である．もしかしたら，その番組の熱心な視聴者はドアＣにアタリが良くくることを知っているかもしれないし，スタジオの観客者はドアＡの陰にヤギの尻尾を見たかもしれない．また，ドアの後ろを知っているホストにとってアタリの確率は０か１（０％アタリか100％アタリ）でしかない．あくまで，アタリが1/3となっているのは「ドアの後ろを知らないゲストにとっての確率」でしかないのである．ゲストの「主観的な信念の度合い」と言っても良いかもしれない．

繰り返すが，確率という概念があるのは1/3の「信念の度合い」としてだけであり，決して「対象の存在確率」としているのではない．アインシュタインの「神はサイコロを振らない」という言葉が示すように，1/3の確率で存在しているとか，車がランダムに配置されていると言った考え方は誤ったものである(2)．従って，ゲームの条件１は次のように書き直さなくてはならない．

1'．ゲストはドアの後ろがどのようになっているか全く予想がつかないでいる．

ゲームの条件１と1'のもとでは確率の計算が同じになることから，両条件は確率論の中で同一視されている場合がある．しかし，「ドアの後ろがランダムに決められている」（対象側の状態）と「ゲストがドアの後ろを知らない」（対象を認識する側の状態）は全く別の考え方であることを，ここで強調しておきたい．ここで，

（Ａ）　ドアの後ろを知らないでいる≒アタリを選ぶ確率が1/3

と理解することを「主観確率」と呼ぶ．「ゲストがドアの後ろを知らないでいる」というのは，誰もゲストの内面は分からないので非常に漠然とした条件である．従って，「アタリを選ぶ確率が1/3になる」というのは，実験や考察（思考実験などとも言う）では調べようがない．そうなると，上述の（Ａ）は客観的な主張とは言えず，ゲストの主観によるものと考えられる．

主観確率を認めるか否かについては激しい議論が行われてきているが，それに対する明確な結論は未だ得られてはいない．そもそも，主観確率，そして，対となる客観確率とは何かということについても議論が繰り返されてきているのが実状である．また，主観確率を認める立場においても，その主観性をどこまで認めるかについてはいろいろな立場に分かれているのであるが，ここでは，これら「深遠な」問題はさておき，仮定（Ａ）を主観確率と理解して話を進めたい．

ちなみに主観確率を認める立場をベイズ主義，主観確率を認めず客観確率のみで議論する立場を頻度確率主義などと呼んで区別されたりする．ここで，ベイズ主義というのは，主観確率を議論するのに重要な役割を果たす条件付確率の定理を導いたベイズ（Thomas Bayes）にちなんで命名されたものである(3)．その条件付確率の定理（ベイズの定理）は次のものである．

ベイズの定理．$P(E)$を事象Eが起こる確率，$P(E|F)$を事象Fが起きた後に事象Eの発生する確率とする．このとき，

$$P(E|F)=\frac{P(E)P(F|E)}{P(F)}$$

が成り立つ[(4)]．

ここで，$P(E|F)$は事後確率，そして，$P(E)$は事象Fが起こる前のEの事前確率と呼ばれている．

この事前確率・事後確率の考え方は事象Fが起こったこと（モンティ・ホール問題の例で言えば，ホストがヒントでドアを開けたこと）を知っているか否かでアタリの確率が変わることを示している．対象には変化がないのであるから，ここで変化している確率というものは主観的な確率（ゲストの信念の度合い）であると考えられる．

このように，事前確率・事後確率という考え方は，主観確率の概念と切り離せないものであるので，古典的な頻度主義の確率論・統計学では一般に用いられていない．

このベイズの定理を用いて，モンティ・ホール問題を再考してみたい．つまり，ホストがドアＣを開けた後のドアＡ，Ｂのアタリであるそれぞれの確率（事後確率）の計算である．

解答３（事後確率）．選択したドアＡ，Ｂ，Ｃがアタリである事象をそれぞれ同じ記号A，B，Cで表す．つまり，それぞれのドアがアタリである確率は$P(A)=P(B)=P(C)=1/3$である．また，ホストがドアＣを開ける事象をHとする．求めたいのは，ホストがドアＣを開けた後，ドアＡもしくはドアＢがアタリである確率，つまり，$P(A|H)$と$P(B|H)$である．これらは，それぞれベイズの定理から次のようになる．

$$P(A|H)=\frac{P(A)P(H|A)}{P(H)},$$
$$P(B|H)=\frac{P(B)P(H|B)}{P(H)}.$$

ここで，$P(H|A)$，$P(H|B)$，$P(H|C)$はアタリがドアＡ，Ｂ，Ｃであるとき，ホストがヒントとしてドアＣを開けるそれぞれの確率である．アタリがドアＡの場合，ドアＢ，Ｃ共にハズレであるので，ホストはゲームの条件５からそれぞれのドアを1/2の確率で開けることになる．また，アタリがドアＢのときホストは必ずドアＣを開けてみせることに，そして，アタリがドアＣのときホストはドアＣを開けないことになる．つまり，アタリがそれぞれドアにあるとき，ホストがドアＣを開ける確率は次のようになる．

- アタリがドアＡのとき，ホストがドアＣを開ける確率$P(H|A)$は1/2である，
- アタリがドアＢのとき，ホストがドアＣを開ける確率$P(H|B)$は１である，
- アタリがドアＣのとき，ホストがドアＣを開ける確率$P(H|C)$は０である．

次に，ホストがヒントとしてドアＣを開ける確率$P(H)$を考える．これは，アタリがドアＡのときホストがドアＣを開ける確率，アタリがドアＢのときホストがドアＣを開ける確率，そして，アタリがドアＣのときホストがドアＣを開ける確率，これら３つの和として求められる．

$$\begin{aligned}P(H)&=P(A)P(H|A)+P(B)P(H|B)\\&\quad+P(C)P(H|C)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

以上の準備をもとにして，

$$P(A|H)=\frac{P(A)P(H|A)}{P(H)}=\frac{1/3\cdot 1/2}{1/2}=\frac{1}{3},$$
$$P(B|H)=\frac{P(B)P(H|B)}{P(H)}=\frac{1/3\cdot 1}{1/2}=\frac{2}{3}$$

と計算できる．よって，$P(A|H)<P(B|H)$が言える．つまり，「ホストがドアＣを開けるという事象Hが起こったもとで，ドアＡがアタリである確率」$P(A|H)$より，「ホストがドアＣを開けるという事象Hが起こったもとで，ドアＢがアタリである確率」$P(B|H)$の方が高いこと

が言える．よって，ドアＢに選び直した方が良いと結論づけられる．

以上説明してきたように，モンティ・ホール問題は，従来は事前確率・事後確率の考え方をもとにしての理解がなされている．解答１〜３も仮定（Ａ）のもとに事後確率を用いた推定を行ってきている．

つまり，主観確率という概念を認めない立場においては，モンティ・ホール問題は正確には理解され切れていないと言える．

３　最尤法

ここまで，確率論と統計学という用語を混ぜて記述してきたが，本来確率論とは数学の定義をもとにするものであり，ここで扱っている確率クイズのモンティ・ホール問題は，確率という概念を現実に適用させる学問である統計学の問題として見るべきである．ここで統計学を見ると，ベイズ統計とフィッシャー（Ronald Fisher）統計に分けられる．ベイズ統計は，上述した事前確率・事後確率の概念に依っており，

- 事後確率の高いものを確からしいものとして推定する

という体系である．

対するフィッシャー統計は「尤度」による推定をする考え方である．具体的には，ある条件に依って結果が現れる場合に，

- 「分かっている結果が得られる確率が最も高い」前提を最も確からしいものとして推定する

という体系である．この推定方法を最尤（さいゆう）法と呼ぶ(5)．

この章ではこのフィッシャー統計の立場で，モンティ・ホール問題を理解することを試みたい．つまり，主観確率という概念を用いずともモンティ・ホール問題が理解できると主張するものである．この方法は統計学において非常に基本的な考え方ではあるにもかかわらず，筆者はこの方法でモンティ・ホール問題を扱っている例を知らない．これは，確率の概念が整理されておらず，ベイズ統計とフィッシャー統計の違いが明確に理解されて来なかったことが一因ではないかと思われる．

解答４（最尤法による理解）．ゲストが最初に選択したドアをＡとし，ホストが開けて見せたドアをＣとする．このとき，解答３同様，アタリがドアＡ，Ｂ，Ｃであるとき，ホストがドアＣを開ける確率は，それぞれ，

１．前提「アタリがドアＡ」のとき，結果「ホストがドアＣを開ける」確率は1/2,
２．前提「アタリがドアＢ」のとき，結果「ホストがドアＣを開ける」確率は１,
３．前提「アタリがドアＣ」のとき，結果「ホストがドアＣを開ける」確率は０

となる．従って，前提「アタリがドアＢである」とき，結果「ホストがドアＣを開ける」となる確率が最も高くなる．すなわち，最尤法の考え方からアタリがドアＢであると推定するのが好ましいと言える．

以上で，ベイズ統計（事後確率による考え方）と，フィッシャー統計（最尤法による考え方）の二通りでモンティ・ホール問題を見ることができた．

４　結論

モンティ・ホール問題は，理解するにあたって複雑な計算を用いる必要はない．それにも関わらず，これほどまでに議論が繰り返されてきていると言うことは，現在の確率論・統計学そのものが現象記述においては，整理すべき点が多いことを示しているのではなかろうか．

我々は鶴亀算のような算数の文章題で悩むことはないし，もし問題や解答が間違っていてもすぐに修正することができる．引き換えて，確率の問題となると，いわゆる専門家であっても解答が間違っているのか，問題文が不適切なのかすぐには分からないという状況になる．

補足として後述するが，昔からある３囚人の

問題とモンティ・ホール問題は確率・統計の問題として全く同じ構造であると言って差し障りはない．３囚人の問題は作者不明であり，いつ頃見出された問題かは分からないが，少なくとも大多数の専門家達にとってよく知られていた問題である．それにも関わらず，モンティ・ホール問題に出会って，すぐにゲームの条件など整理し解決できなかったことからも，確率を用いて現象を記述する方法が現在のところうまくまとまっていないと言わざるを得ない．

筆者たちは，ボルン，ハイゼンベルグ達の量子力学での測定の概念を応用し，古典力学の世界を統一的に理解する体系（測定理論）の提案を行ってきた．この方法で記述することで，測定対象と測定者，そして測定値といった，より分かりやすく，そして統一的な言葉で現象を理解できるようになる[(6)]．この測定理論では，我々が確率の概念をどのように扱うべきかが整理されているため，モンティ・ホール問題のような「確率の概念がもつ曖昧さ」が明確になると考える．

ここでは測定理論の厳密な記述は行わないが，この理論の方針は次の表現を計量的に記述することである．

対象と測定者が存在し，測定を行うことで測定値が得られる．ここで，その測定値が得られるのは確率に依存する，と考える．

このように，対象と測定者を分離して記述することで，従来「確率分布」と一括りにされてきた言葉も，対象の条件か測定者側の性質かを明確に分けて理解することができるようになる．また，測定概念を計量的に定めてあることから，従来の「対象のバラツキ（存在確率）」という考え方も「事前に行った測定の測定値のバラツキ」と数学的に同一視できることになる．測定理論の全体像は［２］を，またその理論のもとで表記した最尤法に関しては［４］を見て頂きたい．

５　補足１：ゲーム条件の再考

ここで補足として，ゲームを特徴づける条件について再考してみたい．

条件５で「ドアＢ，Ｃが共にハズレのとき，ホストは開けるドアを無作為に選ぶ」と宣言しているが，ここでその条件を変えて，「ドアＢ，Ｃのどちらか選ぶのに偏りがある」としてみよう．

5'．アタリがドアＡとすると，ホストがドアＣを開ける確率は$p\,(0 \leq p \leq 1)$である．

つまり，「ゲストはホストがドアを開ける傾向を多少知っている」というより一般的な条件でゲストの推論が成り立つかということである．

はじめに，事後確率で計算するベイズ統計の立場で考えてみよう．

解答５（条件5'の場合:事後確率）．解答３同様に，選択したドアＡ，Ｂ，Ｃがアタリである確率をそれぞれ$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$とし($P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$)，ホストがヒントとしてドアＣを開ける確率を$P(H)$とする．アタリがＡであるとき，ホストがドアＣを開ける確率$P(H|A)$は条件5'からpである．また，アタリがＢであるときホストがドアＣを開ける確率$P(H|B)$は１で，アタリがＣであるときホストがドアＣを開ける確率$P(H|C)$は０となる．よって，ホストがドアＣを開ける確率$P(H)$は

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A)\cdot P(H|A) + P(B)\cdot P(H|B) \\ &\quad + P(C)\cdot P(H|C) \\ &= \frac{1}{3}\cdot p + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1+p}{3} \end{aligned}$$

となる．以上をもとに，$P(A|H)$，$P(B|H)$をそれぞれベイズの定理で計算すると

$$P(A|H) = \frac{1/3\cdot p}{(1+p)/3} = \frac{p}{1+p},$$

$$P(B|H) = \frac{1/3\cdot 1}{(1+p)/3} = \frac{1}{1+p}$$

となる．pの値に関わらず$P(A|H) \leq P(B|H)$となるので，ドアＢに選び直した方が良いことになる．

また，最尤法を用いる理解は簡便である．

解答６（条件５'の場合：最尤法）．条件から，ホストがドアＣを開ける確率は

１．前提「アタリがドアＡ」のとき，結果「ホストがドアＣを開ける」確率はpである，
２．前提「アタリがドアＢ」のとき，結果「ホストがドアＣを開ける」確率は１である，
３．前提「アタリがドアＣ」のとき，結果「ホストがドアＣを開ける」確率は０である

となる．よって，pの値に関わらず前提「アタリがドアＢ」のとき，結果「ホストがドアＣを開ける」確率が最も高くなる．すなわち，この場合でもドアＢを選ぶのが良いことになる．

以上のことから，条件５を一般化した条件５'にあってもモンティ・ホール問題に解答を与えることが出来た．

６　補足２：３囚人の問題

この章では,「３囚人の問題」について説明する．ここで述べるように，この問題は，モンティ・ホール問題と同じ構造を持っており，一方を正確に理解することができたならば，両者を別個に議論する必要がなかったことが分かる．

牢獄の中に，３人の囚人Ａ，Ｂ，Ｃがいて，そのうち２人は死刑に，１人は釈放されるということが決定されている．誰が釈放されるかは囚人には明かされておらず，それぞれの囚人が自分は助かるか否かを看守に問うが答えてはもらえない．そこで，囚人Ａは「自分以外の２人のうち少なくとも１人は死刑になるのだから，その者の名前を教えてくれないか」と看守に聞いた．それに対し，看守は，当人に関係ないことであるからと,「囚人Ｃが死刑に確定している」ことを教えてくれた．それを聞いた囚人Ａは「これで助かる確率が1/3から1/2に上がった」と喜んだという．
果たして囚人Ａが喜んだのは正しいのだろうか．

図７

この問題が，モンティ・ホール問題と同等であることはすぐに分かると思う．「釈放」が「アタリ」に,「囚人Ｃの死刑確定を知らせる」ことが「ホストがヒントとしてドアを開ける」ことに相当する．

実際は，囚人Ｂが釈放される確率が1/3から2/3に増えることになるが，囚人Ａは1/3のまま変わらない．従って，囚人Ａはぬか喜びをしていることになる．

７　補足３：測定の公理の数学的表現

本稿では，モンティ・ホール問題にテーマを絞り，複雑な記述を避けるために，測定理論そのものの説明を行わずに述べてきた．ここで,「測定の概念」について説明するとともに，ボルンの量子力学の測定公理に筆者の提案する「数学的表現」を与えたい．

E. Daviesはobservableの概念を導入して量子力学の基礎付けであるBornの公理を次のように表現した．状態空間Ωをコンパクト・ハウスドルフ空間とし，$C(\Omega)$はその上の連続関数からなるバナッハ空間とする．$(X, \mathcal{B}_X)$を測度空間とするとき，三つ組み$(X, \mathcal{B}_X, G)$をobservableと呼ぶ．但し，$G : \mathcal{B}_X \to C(\Omega)$は$\sigma$-加法的集合関数であり，正値，$G(X) = 1$を満たすものである．Daviesらによる公理系は次のように述べられる．

公理１．state $\omega \in \Omega$に対するobservable$(X, \mathcal{B}_X, G)$の測定を行ったとき，測定値が$\Xi \in \mathcal{B}_X$に属する確率は$G(\Xi)(\omega)$である．

筆者はこのボルンの測定公理に次のような数学的表現を与えた．Ωはコンパクト・ハウスドルフ空間とし$(X, \mathcal{B}_X)$を測度空間とする．$(\mathcal{F}_\Omega(\mathcal{B}_X), \pi)$は，$\Omega$をBase-manifold，$\mathcal{B}_X$をファイバー，$\pi$を射影とするファイバーバンドルとする．

公理 1'．ファイバーバンドル$(\mathcal{F}_{\Omega}(\mathcal{B}_X),\pi)$上の汎関数$M:\mathcal{F}_{\Omega}(\mathcal{B}_X,\pi)\to\mathbb{R}$を測定，各 $\omega\in\Omega$に対し，$M|_{\pi^{-1}(\omega)}(\Xi)$をstate ωにおける事象$\Xi\in\pi^{-1}(\omega)$の起こる確率と呼ぶ．但し，各ファイバー上の写像$M|_{\pi^{-1}(\omega)}:\pi^{-1}(\omega)\to\mathbb{R}$は$\sigma$-加法的集合関数で，正値，$M|_{\pi^{-1}(\omega)}(X)=1$を満たす．

【註】

（1） ニュートン力学は，量子力学でいう「システム間のルール（Schrödinger picture, Heisenberg picture）」の古典化であるとも言える．ただ，古典の世界には量子力学のもう一つの柱である「測定の概念」に対応するものが存在してこなかったと言える．

（2） アインシュタインが「神はサイコロを振らない」と述べたのは量子力学における不確定性原理の批判として，古典力学の世界を絡めて述べたものである．現実の古典力学の世界において，存在確率を仮定し利用するのは，極めて慎重さを要すると考える．

（3） ベイズは決して主観確率という概念を提唱した人物ではない．ベイズが生きていたのは18世紀であるが，主観確率・客観確率の議論が起きるのは20世紀になってからである．ただ，彼の残した条件付確率の定理は後に主観確率の理論的主柱として利用されることになったのである．

（4） $P(E\cap F)$を事象EとFが共に起こる確率であるとする．すると，条件付確率$P(E|F)$の定義から

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

が成り立つ.また,分子が$P(E\cap F)=P(E)P(F|E)$であるので，ベイズの定理が証明される．

（5）「フィッシャーの最尤法」は，本来であれば，尤度関数と言った確率論の用語を用いて記述されなければならないが，ここではこれら定義には触れず，本質的な概念のみで述べている．

（6） 確率論においては「確率空間」や「確率変数」といった現象と対応し難い抽象的な概念を基本にして理論が作られている．そのため，現象を記述しようとする際に困難が生じると考えられる．

【参考文献】

［1］ Marilyn vos Savant. “*Ask Marilyn*” *column*, Parade Magazine. p.16. 9 September, (1990).

［2］ Shiro Ishikawa. *Mathematical Foundations of Measurement Theory*, Keio University Press Inc. Tokyo, (2006).

［3］ Shiro Ishikawa, Kohshi Kikuchi and Masayuki Nakamura. *Elementary school mathematics in quantitative language*, Far East Journal of Mathematical Education. Volume 2, Issue 2, pp.165–180. December, (2008).

［4］ Kohshi Kikuchi. *An axiomatic approach to Fisher's maximum likelihood method*, Nonlinear Studies. to be published.

［5］ Kohshi Kikuchi. *Psychological tests in measurement theory*. submitted.

［6］ Kohshi Kikuchi. *Axiomatic approach to regression analysis*. submitted.

［7］ Paul Hoffman（訳：平石律子）．放浪の天才数学者エルデシュ，草思社，(2000)．