

アポーハ論と二重否定

Apoha Theory and Double Negation

上田 昇
Noboru UEDA

Keywords : Dignaga, three-membered inference, Apoha logic

キーワード : ディグナーガ、三支作法、アポーハ論理

はじめに

ディグナーガは言葉による知が比量知に他ならないということの理論的根拠としてアポーハ論を位置づけている。つまり語がその意味 (artha) を知らしめる在り方と、比量において論証因が論証対象を知らしめる在り方が共通 (「他の排除」) であるという意味で言語知は比量知である。実際、ディグナーガにとって比量は「他の排除」による知の確定であるとされる。例えば、煙は非火の単なる排除 (anagni-nivṛtti-mātra) を知らしめる (PS Chapter2, p.47, l.13)、煙によって知られるのは「ここに火こそがある、〔すなわち〕非火があるのではない : agnir evātra nāagnir」ことである (PS Chapter2, p.50, l.1)。このように「アポーハ (排除)」が比量の在り方を特徴づける。

「牛」の意味 (artha) が非牛の排除であり、煙によって知られるものが非火の排除である。「非...の排除」における「非」と「排除」をとともに「否定」と呼べば、ここには“二重否定”が存在すると言える。本稿はこの“二重否定”について記号論理学を借りて分析しようとするものである。

なお本稿の第一節から第四節までに関しては、その要点のみを上田2018bで述べた。従って本稿は別稿の補足・敷衍でもある。そのため、本稿には別稿と記述が一部重複するところがあることをお断りしておきたい (なお [付論] は別稿には全く含まれない)。

[1] アポーハ代数

ディグナーガは「他の排除 (anya-apoha)」たる語の意味 (artha) を議論するに際して、しばしば下位語・上位語 (特殊語・普遍語) の関係に触れる。一言で言うなら、二つの語は下位語・上位語関係にあるとき、そしてそのときにのみ排除関係にはない。そして、下位語による

排除は、その上位語による排除をすべて含むとされる。つまり、ディグナーガにとって下位語・上位語関係は「排除」の多少によって決まる関係であって、直接的には外延の狭広によるのではない（事実上、外延の狭広に対応するが）。

このような下位語・上位語関係を念頭に置いて、また否定名辞や複合語をこの下位語・上位語関係に組み込むことが可能となるように、私は語とその外延が定まった語群 $\langle \omega, U \rangle$ （語の全体を ω 、対象の全体を U で表す）を所与として、語のアポーハ論的意味（*artha*）を求めた。すなわち、語 X を名前として持たない諸対象が持つ名前（ ω の要素）の集合として、語 X の意味（*artha*）を定義し、さらに、所与の語を命題変項（命題変数）と見なして、それらの命題変項から論理記号（否定 non 、連言 \wedge 、選言 \vee ）によって作られる論理式（拡大された語）のアポーハ論的意味（*artha*）を「アポーハ代数」を用いて定義した。これは上の下線部の「語」を ω の要素だけでなく論理式（拡大された語）に拡大するものである。すなわち論理式 P を名前として持たない諸対象が持つ名前（ ω の要素）の集合として、論理式 P の意味（*artha*）を定義した。

以下アポーハ代数の定義にかかわる部分を上田2016から引用する（文脈上若干文言を変えたところがある）。

まず準備としていくつかの関数を定義する。

- 1) ω の任意の部分集合 α を対象領域に写す関数 h .

$$h(\alpha) := \alpha \text{ の各要素の外延の和集合}$$

例えば、 $\alpha = \{A, B\}$ のとき、 $h(\alpha) = M(A) \cup M(B)$. (語 X について $M(X)$ は語 X の外延を表す。)

- 2) 対象の集合 s (U の任意の部分集合 s) について、外延が s と交わる語の集合（被覆）を表す関数 cov .

$$\text{cov}(s) := \{Z \in \omega \mid M(Z) \cap s \neq \phi\}.$$

- 3) 対象の集合 s について、外延が s に含まれる語の集合（ s の“コア”）を表す関数 core .

$$\text{core}(s) := \{Z \in \omega \mid h(\{Z\}) \subseteq s\}.$$

- 4) 対象の集合 s について、外延が s と交わらない語の集合を表す関数 g .

$$g(s) := \{X \in \omega \mid h(\{X\}) \cap s = \phi\}.$$

(なお、この定義は、 $g(s) = h(\Gamma) \cap s = \phi$ となる最大の $\Gamma \subseteq \omega$ と定義することと同等である。)

以上の関数を用いて、語 X の付値 $[X]$ を次のように定義する。

$$(*) X \in \omega \text{ のとき、} [X] := \text{core}(h(\{X\})).$$

すると、 $h([X]) = h(\{X\}) = M(X)$ となり、 $h([X])$ は語 X の外延と一致する。

ω の要素について定義した付値を論理式に拡大する。まず、命題変項（従って論理式）とみなされた $X \in \omega$ については、(*)により X の付値を与えるものとする。そして、論理式（拡大

された語)の付値を次のようにして順に(帰納的に)定める。 $[X \wedge Y] = [X] \cap [Y]$, $[X \vee Y] = [X] \cup [Y]$, $[\text{non}X] = g(h([X]))$.

論理式の付値全体は、所与の語群 ω の冪集合 2^ω の中に、演算 \cap, \cup, g, h について閉じた集合(代数系)を作る。これをアポーハ代数と名づける。

こうして、 ω の要素を命題変項とする任意の論理式 P について、その付値 $[P]$ および $h([P])$ を定めることができる。 $h([P])$ を P の“外延”と呼ぶ。なお、関数 g, h の定義より、否定名辞 $\text{non}P$ の外延は、その外延が P の“外延”と共通部分を持たないところの語の外延の和集合となる。上田2016, p. (113)

論理式 P のアポーハ論的意味 $\text{artha}(P)$ はアポーハ代数を用いて次のように定義される。

$$\text{artha}(P) := \text{cov}((h([P]))^c) \quad (\text{肩付の}c\text{は補集合を表す。})$$

証明は省略するが、論理式 P, Q について、

$$\text{artha}(P) \supseteq \text{artha}(Q) \Leftrightarrow h([P]) \subseteq h([Q]) \quad (\Leftrightarrow\text{は同値を表す。})$$

が成立する(上田2018)。

ここで、語の意味(artha)を求めるに際して、補集合そのものでなく、その被覆(covering)に拠った理由について述べる。

例えば語「牛」に関連して、否定名辞「非牛」の外延を「牛」の外延の“補集合”とする考え方があり得る。しかし補集合という概念には問題があると思う。なぜなら、補集合の要素はその名前(種名 $jātisabda$)を問われていないからである。全体集合 U の部分集合 s の補集合 s^c (すなわち $U-s$)は要素だけから決まり、それら要素の一般名称は必要とされない。せいぜいそれら要素の各々の名(固有名)があればよい。(述語論理学においても対象領域の要素には個々別々の名前を考える。Cf.小野1994, p.67)。

ディグナーがあるいは彼と同時代のインド論理学者がはたして種名なしの対象の集まりを「非牛」について考えることがあったであろうか。そのような“補集合”は西洋においてもコントロールの集合論から以降のものではないだろうか。「牛」以外のものにも必ず種名があるとするのがアポーハ論の前提であると思う。つまり、「牛」以外のものが何と何から構成されるかが問われなければならないであろう¹⁾。

これに関連して、固有名の意味(artha)も「他の排除」であるかどうかの問題がある。ディグナーは固有名にもアポーハ論は妥当するとしている(PS 5章, k.50a)。しかし、拙論(2001, p.306ff.)で論じたように、ディグナーは固有名を全体と部分とに共通して適用される語と見ており、事実上、「水」のような物質名として扱っている。要するにディグナーはアポーハ論では事実上固有名を扱ってはいないと思える。

「語の意味は他の排除である」という基本命題についての我々の解釈(理論)においては、語群の要素としての語は述語論理学で言う単項述語に相当しており、その意味(artha)が求

められるべきなのである。このことは、我々の理論は真には固有名を扱っていないということである。そしてそれはディグナーガのアポーハ論の実際でもあると思う。またこのことは、固有名を下位語・上位語の鎖の中に（最下位語として）位置づけることの困難（不可能）を物語っているのであると思える。

[2] アポーハ論理

我々は命題論理の体系としてGentzenのLK（古典論理）をとり、それに基づき二種類の論理体系BLとALを定義し、これらをアポーハ論理と呼ぶ（上田2018a参照）。

まず次の論理体系をBLと呼ぶ。

LKから含意左、含意右、否定右規則を取り除き、替えてルール①およびルール②を導入した体系。ただし $\text{non}P \rightarrow \text{non}P$ のかたちの式も始式として認める（Pは任意の論理式）。

$$\begin{array}{c} \text{ルール①} \\ \frac{P \rightarrow \text{non}Q}{Q \rightarrow \text{non}P} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ルール②} \\ \frac{P \rightarrow}{\rightarrow \text{non}P} \end{array}$$

（ルール②はLJの否定右の特殊な場合—上式の左辺にただ一つの命題が現れる場合—に対応する。）

次に、BLにおけるルール①及び②に替えてLJ（直観主義論理）の否定右規則を採用する論理体系を考えることができる。この体系をALと呼ぶ。

LJの否定右：

$$\frac{A, B \rightarrow}{B \rightarrow \text{non}A}$$

BLのルール①は次のようにしてLJの否定右の成り立つ体系で導出できる。

$$\frac{\frac{P \rightarrow \text{non}Q \quad \frac{Q \rightarrow Q}{\text{non}Q, Q \rightarrow}}{P, Q \rightarrow} \quad \text{cut}}{Q \rightarrow \text{non}P} \quad \text{否定右}$$

LKの式（sequent）

$$A_1, A_2, \dots, A_m \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_n$$

に対する付値を次のように定義する。

$$[A_1, A_2, \dots, A_m \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_n] := [A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m]^c \cup [B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n].$$

すると、

$$[A_1, A_2, \dots, A_m \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_n] = \omega \Leftrightarrow [A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m] \subseteq [B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n].$$

ただし、式の左辺と右辺に現れる同一の命題変項には同一の語 (ω の要素) を代入するものとする。

なお、 $m=0$ のとき、

$[\rightarrow B_1, B_2, \dots, B_n] := [B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n]$ 、 $n=0$ のとき、 $[A_1, A_2, \dots, A_m \rightarrow] := [A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m]$ とする。(LKは無矛盾。すなわち、式 \rightarrow は証明図に現れない。Cf. 竹内・八杉 p.50.) (上田2018a参照)

LKの推論規則は、唯一の例外を除いて、上式の付値が ω であるとき下式の付値も ω になる (上田2018a、注5参照)。その唯一の例外は否定右規則である。しかし語群がAL語群の場合には、LJの否定右についても、その上式の付値が ω であるとき下式の付値も ω になる。ここで、AL語群は次のように定義される語群である。

語の集合 ω の任意の二語A,Bについて、 $[A] \cap [B] = \phi$ ならば $[A] \subseteq [\text{non}B]$ 。
あるいは、

語の集合 ω の任意の二語A,Bについて、 $[A] \cap [B] \neq \phi$ または $[A] \subseteq [\text{non}B]$ 。
言い換えるならば、A,B($\in \omega$)の外延が次の左図のようなオイラー図で表せるとき、必ず語C $\in \omega$ が存在して、 $M(C) \subseteq M(A) \cap M(B)$ が成り立つような語群がAL語群である(右図)。(M(C) = M(A) \cap M(B) である必要はない。)



さて、P, Qがp, q, r,...を命題変項とする論理式であるとき、任意の語群の任意の語によるp, q, r,...への代入で $[P \rightarrow Q] = \omega$ が成り立つならば、式 $P \rightarrow Q$ を「恒等的」と呼び(例えば $P \rightarrow \text{nonnon}P$ は恒等的である)、また、任意のAL語群の任意の語によるp, q, r,...への代入で $[P \rightarrow Q] = \omega$ が成り立つならば、式 $P \rightarrow Q$ を「AL恒等的」と呼ぶ。このとき、次の結果が得られる(上田2018a)。

P, Qを論理式として、式 $P \rightarrow Q$ について下図の含意関係 (\rightarrow で表す) が成り立つ。従って、恒等的な式は悉くALで証明可能である²⁾。

BLで証明可能	\rightarrow	恒等的
↓		↓
ALで証明可能	\Rightarrow	AL恒等的

さらに、ALで証明可能な式 $P \rightarrow Q$ は直観主義命題論理(LJ)から含意に関する規則を除

いた体系で証明可能であり、その逆も成り立つ。なおBLによって証明可能な式の集合はALによって証明可能な式の集合に含まれ、さらに後者はLKによって証明可能な式（トートロジー）の集合に含まれる（詳細は上田2018a参照）。

[3] 変換

F. Staal (1962) はインド論理学の分析に当たり、二項関数 $A(y, x)$ を用いた。Staal は次のように説明する。

Here $A(y, x)$ denotes the relation of occurrence of a term y in its locus x ; ...

我々もこれに倣い、ダルマ y をダルミン x が有することを $A(y, x)$ で表す。そして、次のことを前提する。

「 $A(y, x) \rightarrow A(\text{“y-vat”}, x)$ かつ $A(\text{“y-vat”}, x) \rightarrow A(y, x)$ 」が成り立つ。

これを $A(y, x) \Leftrightarrow A(\text{“y-vat”}, x)$ と書く。ここで、 $A(\text{“R”}, z)$ は「対象 z は名前 R を有する」ことを表す。従って、 $A(\text{“y-vat”}, x)$ は「対象 x は名前 $y\text{-vat}$ を有する」ことを表す（ここで $y\text{-vat}$ は「 y を有するもの」という名前を表す）。そして、 $A(\text{“R”}, z)$ の真理条件を「 z は “ R ” の “外延” に含まれる」こと、すなわち $z \in h[R]$ とする。

さて、一つのAL語群 $\langle \omega, U \rangle$ が与えられているとする。Uから任意に選んだ対象の一つを z とする。このとき、語 (ω の要素) を命題変項とする論理式 (拡大された語) P に命題 $A(\text{“P”}, z)$ を対応させる。式 $P_1, P_2, \dots \rightarrow Q_1, Q_2, \dots$ には $A(\text{“P}_1\text{”}, z), A(\text{“P}_2\text{”}, z), \dots \rightarrow A(\text{“Q}_1\text{”}, z), A(\text{“Q}_2\text{”}, z), \dots$ なる式を対応させる。

語 (ω の要素) を命題変項とする論理式あるいは式に対する如上の対応を「変換」と呼ぶ。

変換後の論理記号についての定義を次のように行う。

$$A(\text{“P”}, z) \wedge A(\text{“Q”}, z) := A(\text{“P} \wedge \text{“Q”}, z),$$

$$A(\text{“P”}, z) \vee A(\text{“Q”}, z) := A(\text{“P} \vee \text{“Q”}, z),$$

$$\text{non}A(\text{“R”}, z) := A(\text{“nonR”}, z).$$

これらの定義の下で、次のことが成り立たなければならない (可換図式)。

α をALの推論規則の一つとする。上式について、それを変換した後、推論規則 α によって得られる下式は、変換前の上式から α によって得られる下式を変換して得られる式と一致する。

$$\begin{array}{lcl}
 & \text{変換} & \\
 \text{上式} & \Rightarrow & \text{上式} \\
 \alpha \Downarrow & \text{変換} & \Downarrow \alpha \\
 \text{下式} & \Rightarrow & \text{下式}
 \end{array}$$

例えば、 α がLJ否定右の場合。(見やすさのため式に下線を付す。)

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{P, Q \rightarrow}{\alpha \Downarrow} & \xRightarrow{\text{変換}} & \frac{A("P", z), A("Q", z) \rightarrow}{\alpha \Downarrow} \\
 Q \rightarrow \text{non}P & \xRightarrow{\text{変換}} & \frac{A("Q", z) \rightarrow \text{non}A("P", z)}{=A("Q", z) \rightarrow A("nonP", z)}
 \end{array}$$

α が \wedge 右の場合。

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{P \rightarrow Q \quad P \rightarrow R}{\alpha \Downarrow} & \xRightarrow{\text{変換}} & \frac{A("P", z) \rightarrow A("Q", z) \quad A("P", z) \rightarrow A("R", z)}{\alpha \Downarrow} \\
 P \rightarrow Q \wedge R & \xRightarrow{\text{変換}} & \frac{A("P", z) \rightarrow A("Q", z) \wedge A("R", z)}{=A("P", z) \rightarrow A("Q \wedge R", z)}
 \end{array}$$

この \wedge 右規則については次の問題が生じる。

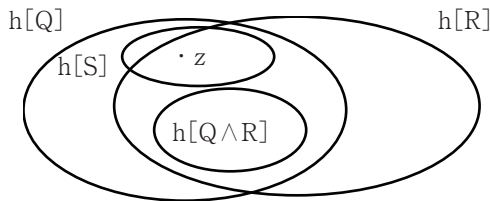
$$\frac{P \rightarrow Q \quad P \rightarrow R}{P \rightarrow Q \wedge R}$$

は

$$\frac{A("P", z) \rightarrow A("Q", z) \quad A("P", z) \rightarrow A("R", z)}{A("P", z) \rightarrow A("Q \wedge R", z)}$$

に変換されるが、定義により $A("Q \wedge R", z) = A("Q", z) \wedge A("R", z)$ であるから、 $A("Q \wedge R", z)$ と $A("Q", z) \wedge A("R", z)$ は同値でなければならない。しかし、これは以下に見るように無条件には成り立たない。

論理式Pについて $A("P", z)$ は $z \in h[P]$ のときにのみ真である。しかし、一般に $h[Q \wedge R] = h[Q] \cap h[R]$ は成り立たない。次の図(オイラー図)がそれを示している ($Q, R, S \in \omega, z \in U$ とする)。



図の場合、 $z \in h[Q] \cap h[R]$ かつ $z \notin h[Q \wedge R]$ 。従って、 $A("Q", z)$ および $A("R", z)$ は真

であるが、 $A("Q \wedge R", z)$ は偽となってしまう。

そこで、我々は次のことを前提する。

所与の語群 $\langle \omega, U \rangle$ においては任意の語 $x, y \in \omega$ について $h[x \wedge y] = h([x] \cap [y]) = h[x] \cap h[y]$ (従って任意の論理式 P, Q について $h[P \wedge Q] = h([P] \cap [Q]) = h[P] \cap h[Q]$) が成り立つ³⁾。

この前提の下で、関式は可換となり、変換後の推論の妥当性が保証される。

先ず、変換後の式の真理値を次のように定める。

$A("P_1", z), A("P_2", z), \dots \rightarrow A("Q_1", z), A("Q_2", z), \dots$ の真偽を $A("P_1", z) \wedge A("P_2", z) \wedge \dots \rightarrow A("Q_1", z) \vee A("Q_2", z) \vee \dots$ なる式の真理値と定義し、式の真理値については、真 \rightarrow 偽, および真 \rightarrow の場合のみ偽, 他の場合には真と定める。

次の例 (\wedge 右規則) を考える。

$$\frac{P \rightarrow Q \quad P \rightarrow R}{P \rightarrow Q \wedge R}$$

ここで、 $[P \rightarrow Q] = \omega$ かつ $[P \rightarrow R] = \omega$ とする。一般に論理式 P について $A("P", z)$ は $z \in h[P]$ のとき、そしてそのときにのみ真であるが、いまの場合、 $h[P] \subseteq h[Q]$ であるから、 $A("P", z) \rightarrow A("Q", z)$ は真である。 $h[P] \subseteq h[R]$ であるから同様に、 $A("P", z) \rightarrow A("R", z)$ も真である。従って、次の推論 (\wedge 右) が妥当性を有するためには下式が真であることが必要である。

$$\frac{A("P", z) \rightarrow A("Q", z) \quad A("P", z) \rightarrow A("R", z)}{A("P", z) \rightarrow A("Q", z) \wedge A("R", z)}$$

$[P \rightarrow Q] = \omega, [P \rightarrow R] = \omega$ より、 $[P] \subseteq [Q] \cap [R] = [Q \wedge R]$ 。従って $h[P] \subseteq h[Q \wedge R]$ 。ゆえに、 $A("P", z) \rightarrow A("Q \wedge R", z)$ は真。波線の条件により $A("Q \wedge R", z)$ は $A("Q", z) \wedge A("R", z)$ と同値であるから、 $A("P", z) \rightarrow A("Q", z) \wedge A("R", z)$ は真である。

語群 $\langle \omega, U \rangle$ が AL 語群 のとき、付値が ω となるいくつかの式を前提として、アポーハ論理 (BL, AL) によって証明される式 (導出される式) の付値は ω になる (第2節参照)。従って変換によって得られる証明図においても、真なるいくつかの前提から真なる結論が導き出される。すなわち論理的妥当性 (validity)⁴⁾ が保証される。

[4] 三支作法

ディグナーガの三支作法は次のように表すことができるであろう。(p: パクシャ, s: 所立法, h: 論証因。喩は全称化しておく。z は対象を表す変項。)

- (宗) $A(s, p)$
 (因) $A(h, p)$
 (同喩) $\forall z (A(h, z) \text{ ならば } A(s, z))$
 (異喩) $\forall z (\text{non}A(s, z) \text{ ならば } \text{non}A(h, z))$

ディグナーガはまた vyatireka (遮遣)、従って異喩を比量の主役に据えている⁵⁾。従って、次の形がより基本的であろう。

- (宗) $A(s, p)$
 (因) $A(h, p)$
 (異喩) $\forall z (\text{non}A(s, z) \text{ ならば } \text{non}A(h, z))$
 これをいま、三支作法の基本形と呼ぶ。

この基本形において、しかしパクシャ p は異喩における変項 z の対象領域には含まれない(いわゆる外遍充論:ディグナーガの場合パクシャ p は同品でもなければ異品でもない)。それにもかかわらず、「 $\text{non}A(s, p)$ ならば $\text{non}A(h, p)$ 」—これも vyatireka と呼ぶことにする—に基づく推論が行われると考えられる。従って三支作法の基本形はさらに

- (宗) $A(s, p)$
 (因) $A(h, p)$
 (vyatireka) $\text{non}A(s, p) \text{ ならば } \text{non}A(h, p)$
 と書けるであろう。

ところが、この最後の基本形の場合、以下に見るように、因と vyatireka を前提として $\text{nonnon}A(s, p)$ はアポーハ論理で証明できるが、 $A(s, p)$ は証明できない。

最後の基本形における宗を $\text{nonnon}A(s, p)$ に替え、また vyatireka を Gentzen の式 (sequent) の表記法を用いて $\text{non}P \rightarrow \text{non}Q$ で表し、($P=A(s, p)$, $Q=A(h, p)$ と置いて) 三支作法を

- (宗) $\text{nonnon}P$
 (因) Q
 (vyatireka) $\text{non}P \rightarrow \text{non}Q$

と表す。これをアポーハ比量と呼ぶ。

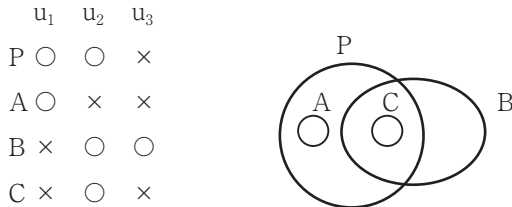
ここで、 Q と $\text{non}P \rightarrow \text{non}Q$ から $\text{nonnon}P$ がアポーハ論理のうち BL で証明できる。証明図は次のように書ける。

$$\frac{\frac{\text{non}P \rightarrow \text{non}Q}{\rightarrow Q} \quad Q \rightarrow \text{nonnon}P}{\rightarrow \text{nonnon}P}$$

しかし、 Q と $\text{non}P \rightarrow \text{non}Q$ から P をアポーハ論理で証明することはできない。なぜなら、

次に示す語群（AL 語群）から作られるアポーハ代数上の付値は、 $[\rightarrow Q] = \omega$ かつ $[\text{nonP} \rightarrow \text{nonQ}] = \omega$ かつ $[\rightarrow P] \neq \omega$ となるからである。

語群 $\langle \omega, U \rangle$ について、 $\omega = \{P, A, B, C\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ とする（ ω は語の集合、 U は対象の集合）。



ここで $Q = P \vee B$ と置くと、 $[P] = \{P, A, C\}$, $[Q] = \omega$, $[\text{nonP}] = \phi$, $[\text{nonQ}] = \phi$ となるから、 $[\rightarrow Q] = \omega$ かつ $[\text{nonP} \rightarrow \text{nonQ}] = \omega$ かつ $[\rightarrow P] \neq \omega$ である。それゆえ、もし Q と $\text{nonP} \rightarrow \text{nonQ}$ から P がアポーハ論理（AL）で証明可能ならば、この語群がAL語群であることを考慮すれば、 $[\rightarrow P] = \omega$ でなければならず、矛盾に陥る。

このように、因 $A(h, p)$ と $\text{vyatireka} - \text{nonA}(s, p)$ ならば $\text{nonA}(h, p)$ を前提として宗 $A(s, p)$ をアポーハ論理で証明することはできない。アポーハ論理で証明できるのは $\text{nonnonA}(s, p)$ なのである。

さらに、本稿の冒頭で触れたように、ディグナーガは比量を「他の排除」による知の確定と見る。例えば、煙は非火の単なる排除（*anagni-nivṛtti-mātra*）を知らしめる（PS Chapter2, p.47, l.13）。煙によって知られるのは「ここに火こそがある、[すなわち] 非火があるのではない *agnir evātra nānagnir*」ことである（PS Chapter2, p.50, l.1）。

このことを考慮すれば、ディグナーガの比量のさらなる基本形は、

(宗) $\text{nonA}(\text{nons}, p)$ (nons は s の否定名辞を表す。たとえば非火 (*anagni*)。)

(因) $A(h, p)$

(*vyatireka*) $\text{nonA}(s, p)$ ならば $\text{nonA}(h, p)$

と表せるであろう。

ここで次の二つの問題がある。

1. パクシャ p について *vyatireka* は成立するか（上の *vyatireka* は真か）。
2. $\text{nonA}(\text{nons}, p)$ は証明できるか。

1. については次のような語群を設定するとき肯定的に答えられる。

パクシャ p , 所立法 s , 論証因 h に関連して語群 $\langle \omega, U \rangle$ を考える。

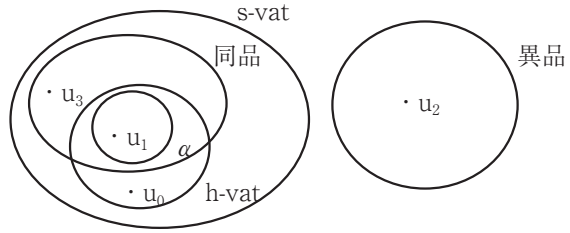
- 1) パクシャが“*s-vat*”の外延に含まれる場合。 $\omega = \{s\text{-vat}, \text{同品}, \text{異品}, h\text{-vat}, \alpha\}$,

$U = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$. ここで、 $p = u_0$.

各語の外延が下の表およびオイラー図のようであるとする（図はhが九句因の第八因のケースである。Uから対象 u_3 を削除すれば第二因になる）。

容易に確認できるように、この語群においては任意の語 $x, y \in \omega$ について $h[x \wedge y] = h([x] \cap [y]) = h[x] \cap h[y]$ （従って任意の論理式P, Qについて $h[P \wedge Q] = h([P] \cap [Q]) = h[P] \cap h[Q]$ ）が成り立つ（この条件については前節参照）。

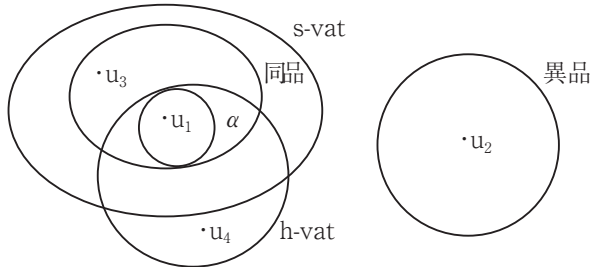
	u_0	u_1	u_2	u_3
s-vat	○	○	×	○
同品	×	○	×	○
異品	×	×	○	×
h-vat	○	○	×	×
α	×	○	×	×



（語 α は波線の条件を満たすために補われる。 α は「同品かつh-vat」（宗同品かつ因同品）の意味を持つ語である。）

2) パクシャが“s-vat”の外延に含まれない場合。同様に次の語群 $\langle \omega, U \rangle$ を考える。 $\omega = \{s\text{-vat}, \text{同品}, \text{異品}, h\text{-vat}, \alpha\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 。ここで、 $p = u_4$ 。

	u_1	u_2	u_3	u_4
s-vat	○	×	○	×
同品	○	×	○	×
異品	×	○	×	×
h-vat	○	×	×	○
α	○	×	×	×



（「同品」の外延と“s-vat”の外延は等しい。）

いずれの場合も、これらの語群から得られるアポーハ代数において、 $[\text{non}(s\text{-vat})] = [\text{non}(h\text{-vat})] = [\text{異品}]$ 。従って、任意の対象 z について $A(\text{“non}(s\text{-vat})”, z) \Leftrightarrow A(\text{“non}(h\text{-vat})”, z) \Leftrightarrow A(\text{“異品”}, z)$ 。

いま因の第三相を

$$\forall z \in U \text{ について, } A(\text{“異品”}, z) \rightarrow \text{non}A(h, z)$$

で表す。そして、 u_0 （あるいは u_4 ）を p で表し、 p をパクシャとする次の比量を考える。

$$(\text{宗}) \text{nonnon}A(s, p)$$

(因) $A(h, p)$

(vyatireka) $A(\text{“異品”}, p)$ ならば $\text{non}A(h, p)$

ここの vyatireka は先のそれ「 $\text{non}A(s, p)$ ならば $\text{non}A(h, p)$ 」と前件がやや異なるが vyatireka と呼んでおく。

$\text{non}A(s, p) \Leftrightarrow \text{non}A(\text{“s-vat”}, p) = A(\text{“non(s-vat)”}, p) \Leftrightarrow A(\text{“異品”}, p)$ より、この三支作法は次のアポーハ比量と同等である。

(宗) $\text{nonnon}A(\text{“s-vat”}, p)$

(因) $A(\text{“h-vat”}, p)$

(vyatireka) $A(\text{“non(s-vat)”}, p) \rightarrow \text{non}A(\text{“h-vat”}, p) (= \text{non}A(\text{“s-vat”}, p) \rightarrow \text{non}A(\text{“h-vat”}, p))$

ここで $[\text{non(s-vat)}] = [\text{non(h-vat)}]$ であるから、この vyatireka は成立する (真である)。そして、因と vyatireka から $\text{non}A(\text{“non(s-vat)”}, p)$ がアポーハ論理 (BL) で証明できる。

$$\frac{\frac{A(\text{“non(s-vat)”}, p) \rightarrow \text{non}A(\text{“h-vat”}, p)}{\rightarrow A(\text{“h-vat”}, p)} \quad A(\text{“h-vat”}, p) \rightarrow \text{non}A(\text{“non(s-vat)”}, p)}{\rightarrow \text{non}A(\text{“non(s-vat)”}, p)}$$

つまり $\text{nonnon}A(\text{“s-vat”}, p)$ が証明できる ($p \in h[\text{“nonnon(s-vat)”}]$) であるから $\text{nonnon}A(\text{“s-vat”}, p)$ は真)。これに対し、すでに見たように、 $A(\text{“s-vat”}, p)$ つまり $A(s, p)$ は ($p = u_0$ の場合、真であるにもかかわらず) アポーハ論理で証明することはできない。

2. についても一定の条件の下で肯定的に答えられる。

上の語群で $s = \text{火}$, $h = \text{煙}$ とおけば、上に述べたように $\text{nonnon}A(\text{“火-vat”}, p)$ すなわち $\text{non}A(\text{“non(火-vat)”}, p)$ が証明できる。ここで、もし $[\text{異品}] = [\text{non(火-vat)}]$ となる語 “non(火-vat)” (“anagni-vat”) が語群に存在するなら、 $[\text{non(火-vat)}] = [\text{non(火-vat)}]$ となる ($\because [\text{non(火-vat)}] = [\text{異品}]$)。このとき、 $\text{non}A(\text{“non(火-vat)”}, p) \Leftrightarrow \text{non}A(\text{“non(火-vat)”}, p)$ であるから、 $\text{non}A(\text{“non(火-vat)”}, p)$ つまり宗 $\text{non}A(\text{non(火)}, p)$ すなわち $\text{non}A(\text{anagni}, p)$ がアポーハ論理で証明できる。

この場合の異品概念はディグナーガの異品概念より狭い。なぜなら、ディグナーガは所立法 ($s = \text{agni}$) の非存在を異品について要求するのであって、必ずしも所立法の対立者 ($\text{nons} = \text{anagni}$) の存在を要求してはいないからである (上田2001, p.83-85参照)。

外遍充論は一種の帰納的推論とも考えられる。過去の経験によって構想された規則 (法則) が現在当面のパクシャ、たとえば「かの山」について成立するものとして、たとえば、煙から火を推論する。しかし、「煙のあるところ、そこに火がある」(anvaya) あるいは「火のない

ところ、そこに煙はない」(vyatireka) という規則(法則)が当面の「かの山」に通用する保証はない。従って、ディグナーガの三支作法を、二つの前提(因支および喩支)と一つの結論(宗支)から成る推論と見るとき、前提の一つとしての喩支(anvayaあるいはvyatireka)は必ずしも成立しない(偽であり得る)。

しかし、上に見たように因の三相の用語「同品」「異品」を含む語群を一定の条件を満たして設定することによって、真なるvyatirekaを用いたアポーハ比量としてディグナーガの三支作法を表すことができる。ただし、その場合の宗(主張命題)は元来の宗の二重否定となる。たとえば、A(火、かの山)なる宗の替わりに、新たな宗をnonnonA(火、かの山)とする。すると、この新たな宗は因とvyatirekaからアポーハ論理によって導出される。

ここで、否定辞nonは、アポーハ論において否定名辞の意味(artha)をもたらず否定辞と本質的に同じであり、直観主義論理学における否定の類似物である。なお、nonnonA(火、かの山)はA(火、かの山)より“弱い”あるいは“寛大な”主張であると言えよう(Pを命題とするとき、一般に $P \rightarrow \text{nonnon}P$ がアポーハ論理で証明可能である)。

さらに、ディグナーガにおける宗は、たとえばnonA(anagni、かの山)である。ディグナーガはこれをA(agni、かの山)そのものと考えたかもしれない。我々の観点からは、しかし、nonA(anagni、かの山)はA(agni、かの山)そのものではない。A(agni、かの山)はアポーハ比量によっては論証不可能であるのに対し、nonA(anagni、かの山)は一定の条件の下で論証可能であるからである。

おわりに

ディグナーガのアポーハ論・比量論に見られる二重否定的表現を考察した結果を総括すれば、次のように言うことができるであろう。語群を用いて「他の排除」としての語の意味(artha)を定める我々の方法は、語群の論理学とも呼ぶべきものを要求するが、それには命題論理学の部分体系としてのアポーハ論理(BL, AL)を以って応えることができる。そして、因とvyatireka(遮遣)を前提とするとき、アポーハ論理によって元の命題そのものは証明できないが、その二重否定命題は証明できる。つまり、外遍充論として帰納法的推論(induction)を想わせるディグナーガの比量は、因とvyatirekaを前提とするとき、元の主張命題ではなく、より“弱い”主張である二重否定命題を証明する形で、(一定の条件の下ではあるが)演繹性(論理的妥当性)を獲得すると言うことができる。すなわち、真なる二つの前提から妥当な推論(アポーハ比量)により一つの真なる結論を導出する。

記号論理学によるディグナーガ論理学の像は譬えてみれば「福笑い」のようなものかも知れない。ディグナーガの顔そのものを復元するのではなく、記号論理学の平面に映じた像を得るに過ぎない。そのとき、文献的には、せいぜい目や鼻の形がどうであるかといった断片的な情報が存在しているだけである(時には矛盾した情報があるかもしれない)。我々はそれら断片的情報を記号論理的に加工して、記号論理学の流儀に従って像を描くのである。そのとき、

ディグナーガの目の情報（一重験）として与えられているものがどうしても記号論理的流儀によっては配置できない（記号論理学的持つ体系性を逸脱する）といったことがあるかもしれない。その場合、我々はこの目の情報を若干加工（美容整形）して見て（二重験）、ディグナーガについて一つの顔を描くのである。いわば我々はディグナーガ論理学的の記号論理学的美容整形を行っている。そして、この整形作業がまたディグナーガ自身の顔を知るよすがとなることを期待するのである。

[付論] 無限個の異品

ディグナーガにとって肯定と否定は有限と無限に関して異なる関係を結ぶ。我々の当面の関心に引き付けて述べるならば、一つの名前（普遍語）が無限個の対象（特殊）と結合すること、言い換えるならば、無限個の対象が（同時に）一つの共通の名前を有することは不可能であるが、名前が無限個の対象（特殊）と（同時に）結合しないことは可能である。従って、無限個の対象において何物かが（同時に）存在することを知ることは不可能であろうが、無限個の対象において何物かが（同時に）存在しないことを知ることは可能であろう。

因の三相に関連してディグナーガは異品（異類）が無数であっても vyatireka は成り立つと言う（Commentary on PSV 5.34. cf. 上田2001, p.243, K.Yoshimizu, n.26）。元の宗の二重否定を新たな宗とするところの、因と vyatireka による比量を我々はアポーハ比量と呼んだが、異品が無数のときのアポーハ比量はどうなるであろうか。

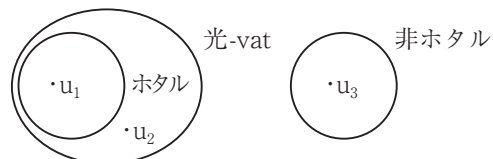
まず、異品が有限個の場合を考える。

1-1. すべての異品を共通に名指す語が存在する場合。

次の二つの語群 $\langle \omega, U \rangle$ を考える。

$\cdot\omega = \{\text{ホタル, 光-vat, 非ホタル}\}, U = \{u_1, u_2, u_3\}$.

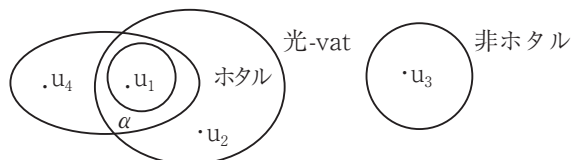
	u_1	u_2	u_3
ホタル	○	×	×
光-vat	○	○	×
非ホタル	×	×	○



(第二因) $u_1 = \text{同品}, u_3 = \text{異品}$

$\cdot\omega = \{\text{ホタル, } \alpha, \text{光-vat, 非ホタル}\}, U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

	u_1	u_2	u_3	u_4
ホタル	○	×	×	○
α	○	×	×	×
光-vat	○	○	×	×
非ホタル	×	×	○	×



(第八因)

$u_1, u_4 = \text{同品}, u_3 = \text{異品}$

u_4 はホタルだが光らない。

ホタルのうち光るホタルには“ α ”という名がつけられている。

語群の語をそれぞれ命題変項と見るとき、次の式(1)について、これら語群から得られるアポーハ代数上の付値が最大元(ω)になることは容易に確認できる。言い換えれば、いずれの語群においても“nonホタル”は“non(光-vat)”の下位語である。

(1) nonホタル \rightarrow non(光-vat)

実際、 $[\text{nonホタル}] = \text{gh}[\text{ホタル}] = \text{gh}\{\text{ホタル}, (\alpha)\} = \text{gh}\{u_1, (u_4)\} = \{\text{非ホタル}\}$, $[\text{non(光-vat)}] = \text{gh}[\text{光-vat}] = \text{gh}\{u_1, u_2\} = \{\text{非ホタル}\}$ であるから、 $[\text{nonホタル} \rightarrow \text{non(光-vat)}] = [\text{nonホタル}]^c \cup [\text{non(光-vat)}] = \omega$.

(1) から、次の式が得られる。

(2) 任意の $z \in U$ について、 $A(\text{“nonホタル”, } z) \rightarrow A(\text{“non(光-vat)”, } z)$

すると、

(3) $\text{non}A(\text{“ホタル”, } u_2) \rightarrow \text{non}A(\text{“光-vat”, } u_2)$

が得られる。これより次の証明図1が(BLで)書ける。

[証明図1]

$$\frac{\frac{\text{non}A(\text{“ホタル”, } u_2) \rightarrow \text{non}A(\text{“光-vat”, } u_2)}{\rightarrow A(\text{“光-vat”, } u_2)} \quad A(\text{“光-vat”, } u_2) \rightarrow \text{nonnon}A(\text{“ホタル”, } u_2)}{\rightarrow \text{nonnon}A(\text{“ホタル”, } u_2)}$$

$\text{nonnon}A(\text{“ホタル”, } u_2) = \text{non}A(\text{“nonホタル”, } u_2)$ であるが、 $[\text{nonホタル}] = [\text{非ホタル}]$ であるから、 $A(\text{“非ホタル”, } u_2) \rightarrow A(\text{“nonホタル”, } u_2)$. 従って、(対偶により) $\text{non}A(\text{“nonホタル”, } u_2) \rightarrow \text{non}A(\text{“非ホタル”, } u_2)$. ゆえに、 $(\text{nonnon}A(\text{“ホタル”, } u_2) = \text{non}A(\text{“nonホタル”, } u_2)$ より)

$$\frac{\rightarrow \text{nonnon}A(\text{“ホタル”, } u_2) \quad \text{non}A(\text{“nonホタル”, } u_2) \rightarrow \text{non}A(\text{“非ホタル”, } u_2)}{\rightarrow \text{non}A(\text{“非ホタル”, } u_2)}$$

こうして、

$\text{non}A(\text{“非ホタル”, } u_2)$ すなわち $A(\text{“non非ホタル”, } u_2)$

が(アポーハ論理で)証明される。(一般に対偶はBLで成り立つ⁶⁾。

つまり次の三支作法が成り立つ。

宗: $\text{non}A(\text{“非ホタル”, } u_2)$

[u_2 は非ホタルではない]

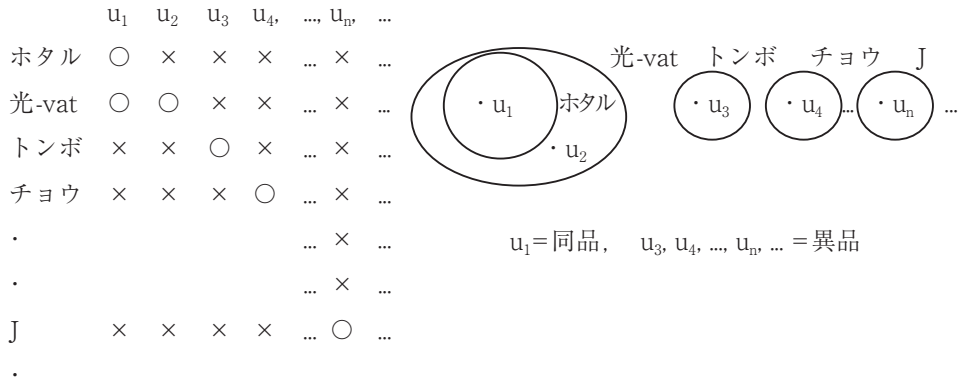
異喩(vyatireka) : nonA(“ホタル”, u_2) ならば nonA(“光-vat”, u_2)

「 u_2 がホタルでないならば、それは光を有さない」

2. 異品が無数存在する場合 (この場合、この付論冒頭で述べたように、すべての異品を共通に名指す語は存在しない)

次の語群 $\langle \omega, U \rangle$ を考える。

$\omega = \{ \text{ホタル, 光-vat, トンボ, チョウ, \dots, J, \dots} \}, U = \{ u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n, \dots \}$



(語群 $\langle \omega, U \rangle$ の語あるいは対象が無数の場合にもアポーハ代数が考えられることは明らかである。)

トンボ、チョウ以外にも無数の昆虫種が光らないとする。ただしそれら光らない昆虫すべてを共通に名指す語は ω に含まれていない。すでに触れたように、ディグナーガは異品が無数であっても vyatireka は成り立つと言う。従って、無数の異品における光の非存在、すなわちホタルならざる無数の昆虫種が光らない、という vyatireka が成り立つ。つまり、語を J で表すとき、任意の $J \in \omega$ について、

$J \in [\text{nonホタル}]$ ならば、 $[J] \subseteq [\text{non(光-vat)}]$

が成り立つ。

従って、 $J \in [\text{nonホタル}]$ について、 $A(“J”, u_2) \rightarrow A(“non(光-vat)”, u_2)$ 、従って $A(“J”, u_2) \rightarrow \text{non}A(“光-vat”, u_2)$ が成り立つ。すると、次の推論が $J \in [\text{nonホタル}]$ についてアポーハ論理で可能である。

$$\frac{A(“J”, u_2) \rightarrow \text{non}A(“光-vat”, u_2)}{\rightarrow A(“光-vat”, u_2) \quad A(“光-vat”, u_2) \rightarrow \text{non} A(“J”, u_2)}$$

$$\frac{\rightarrow \text{non} A(“J”, u_2)}{\rightarrow A(“nonJ”, u_2)}$$

つまり次の三支作法が成り立つ。

宗：任意の $J \in [\text{nonホタル}]$ について、 $A(\text{"non}J, u_2)$

「nonホタルである任意の J について、 u_2 は non J である」

因： $A(\text{"光-vat"}, u_2)$ 「 u_2 は光を有する」

異喩 (vyatireka)：任意の $J \in [\text{nonホタル}]$ について、 $A(J, u_2)$ ならば $A(\text{"non(光-vat)"}, u_2)$

「nonホタルである任意の J について、 u_2 が J ならば u_2 は光を有さない」

なお $A(\text{"nonトンボ} \wedge \text{nonチョウ}, u_2)$ — 1-2.の宗 — は $A(\text{"nonトンボ"}, u_2) \wedge A(\text{"nonチョウ"}, u_2)$ であり、これは、 $A(\text{"nonトンボ"}, u_2)$ かつ $A(\text{"nonチョウ"}, u_2)$ のことであるから、1-2.の宗は 2.の宗の特別な場合と見なせる。

無限個の対象を比量の領域とする場合、ディグナーガにおける vyatireka の主要性は一層明白であるが、しかし 2. の宗における $A(\text{"non}J, u_2)$ は一見二重否定命題ではない。とはいえ、nonホタルである (任意の) J についてパクシャが non J であることを主張するのであるから、それはパクシャについての一種の二重否定的判断 (パクシャはホタルでないものではない) であると言えよう。

【注】

- 1) カントール以前の西洋の論理学者 (Keynes や de Morgan) は否定名辞の外延の決定要因として肯定名辞の場合におけるような“内包”が想定できないことを問題にしている。もっとも de Morgan の場合、肯定名辞の場合も含めて、外延決定に際する内包の関与をあえて無視することによって、否定名辞の外延は結果的に集合論的な補集合概念に近づいていると思える。Cf. 上田 2015, p.2-4.
- 2) 「AL 恒等的 \rightarrow AL で証明可能」なる含意関係の証明に関連して、上田 (2018, p.169) における $\omega^{**} = \{p, q, p \vee q, p \wedge q, p \wedge (p \vee q), q \wedge (p \vee q)\}$ を $\omega^{**} = \{p, q, p \vee q, p \wedge q, p \wedge (p \vee q), q \wedge (p \vee q), \dots\}$ に訂正する。定義により ω^{**} は無限集合 (可算) だからである。
- 3) AL 語群は必ずしも波線の条件を満たさないことは次の AL 語群の存在から明らかである。

	u_1	u_2	u_3	u_4
A	○	×	○	○
B	×	○	○	○
C	×	×	○	×

例えば、「江戸っ子」が次のように定義されているとする。

「江戸っ子」= 自身、両親、祖父母のいずれも江戸で生まれた人。

そして、A は、その父親が江戸で生まれた人を名指す語、B は、その母親が江戸で生まれた人を名指す語、C は「江戸っ子」とする。このとき、 $[A \wedge B] = [A] \cap [B] = [C]$ であるが、 $u_1 \in h[A] \cap h[B]$ かつ $u_4 \notin h[A \wedge B]$ であるから、 $h[A \wedge B] \neq h[A] \cap h[B]$ 。(u_1 は祖父母のうち少なくとも一人は江戸生まれではない。)

- 4) Prior (1962) は validity について次のように述べる。” ... an argument can only be counted valid if no argument of the same form will ever lead us from true premisses to a false conclusion.”

(Ibid., p.1). validityは命題 (proposition) の属性ではなく推論 (inference) の属性である (Lukasiewics, p.21: Inferences ..., not being propositions, are neither true nor false, as truth and falsity belong only to propositions. They may be valid or not.)。なお、Lukasiewics (1951) は記号論理的観点から行われた古代論理学 (アリストテレス論理学) 研究の最上の手本であろう。

- 5) PSV on PS 5. 34: vyatirekamukhenavānumānam (“the inference is based only on joint absence”, Pind, p.42., l.1. Cf. K. Yshimizu, n.29). Jinendrabuddhiも (一般的に) vyatirekaの主要性 (pradhānyam) および anvayaの非主要性を述べている (PS Chapter2, p.47, l.16–19)。

- 6) 対偶の証明図。

$$\frac{\frac{\frac{\text{nonB} \rightarrow \text{nonB}}{\text{A} \rightarrow \text{B}} \quad \text{B} \rightarrow \text{nonnonB}}{\text{A} \rightarrow \text{nonnonB}}}{\text{nonB} \rightarrow \text{nonA}}}$$

- 7) $\text{non}(A \vee B) \rightarrow \text{nonA} \wedge \text{nonB}$ の証明図 (概略)。

$$\frac{\frac{\frac{\text{A} \rightarrow \text{A}}{\text{A} \rightarrow \text{A} \vee \text{B}} \quad \frac{\text{B} \rightarrow \text{B}}{\text{B} \rightarrow \text{A} \vee \text{B}}}{\text{non}(A \vee B) \rightarrow \text{nonA} \quad \text{non}(A \vee B) \rightarrow \text{nonB}}}{\text{non}(A \vee B) \rightarrow \text{nonA} \wedge \text{nonB}}$$

$\text{nonA} \wedge \text{nonB} \rightarrow \text{non}(A \vee B)$ の証明図 (概略)。

$$\frac{\frac{\frac{\text{nonA} \rightarrow \text{nonA}}{\text{nonA} \wedge \text{nonB} \rightarrow \text{nonA}} \quad \frac{\text{nonB} \rightarrow \text{nonB}}{\text{nonA} \wedge \text{nonB} \rightarrow \text{nonB}}}{\text{A} \rightarrow \text{non}(\text{nonA} \wedge \text{nonB}) \quad \text{B} \rightarrow \text{non}(\text{nonA} \wedge \text{nonB})}}{\text{A} \vee \text{B} \rightarrow \text{non}(\text{nonA} \wedge \text{nonB})}$$

$$\text{nonA} \wedge \text{nonB} \rightarrow \text{non}(A \vee B)$$

[略号と参考文献]

PS Chapter2=H.Lasic, H.Krasser, E.Steinkellner, *Jinendrabuddhi's Viśālāmālavatī Pramāṇasamuccayaṭīkā Chapter2*, Austrian Academy of Sciences, 2012.

PSV = Pramāṇasamuccaya: Ole H. Pind, *Dignāga's Philosophy of Language, Pramāṇasamuccayavṛtti V on anyāpoha*, part 1, Österreichische Akademie der Wissenschaften, 2015.

J. Lukasiewics: 1951(2nd ed., 1957), *Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern formal logic*, Oxford Univ. Press.

A. N. Prior: 1962, *Formal logic*, Oxford.

F. Staal: 1962, *Contraposition in Indian logic*, (in *Universals*, The University of Chicago Press, 1988.)

Yoshimizu, Kiyotaka: 2017, How Can the Word “Cow” Exclude Non-cows? Description of Meaning in Dignāga's Theory of Apoha. *Journal of Indian Philosophy* 45, 973–1012. Springer.

上田昇: 2001 『ディグナーガ, 論理学とアポーハ論』山喜房.

同: 2015 「論議領域とアポーハ代数—否定名辞の外延的意味—」『目白大学人文学研究』11:1–16.

同: 2016 「アポーハ論と名辞—否定名辞・複合語」印仏研64-2:(111) – (118).

同: 2018a 「アポーハ論理について—“AL完全性”の証明」『目白大学人文学研究』14:161–184.

同: 2018b 「アポーハ代数・アポーハ論理・アポーハ比量」印仏研67-1:(163) – (169).

小野寛晰: 1994 『情報科学における論理』日本評論社.

竹内外史・八杉麻利子: 2010 『証明論入門 復刊』共立出版.

