目白大学　人文学研究
第14号　2018年　161－184

アポーハ論理について
—“AL完全性”の証明—

On Apoha Logic
—A Proof of “AL-completeness”—

上田　昇
Noboru UEDA

Keywords: Dignāga, Apoha Theory, Apoha Logic
キーワード：ディグナーガ、アポーハ論、アポーハ論理

ディグナーガ（陳那、5－6世紀）は「語の意味は他の排除（アポーハ）である」とするアポーハ論を展開するが、その議論において上位語（普遍語）・下位語（特殊語）の関係が重要な役割を演じている。本稿のテーマはこの関係の記号論理学的解明である。

1．問題の所在

語の集合ωと対象の集合Uがあり、各語についてUの部分集合が対応づけられているものとする。典型的な対応としては語とその外延の対応が考えられる。このような、（外延の確定した）語と対象の集合の対（$<\omega, U>$）を「語群」と呼ぶ。上田（2016a）では、否定（non）、連言（$\wedge$）、選言（$\vee$）の三種類の論理記号の範囲で構成される論理式（ωの要素を命題変項と見立てる）を「拡大された語」と呼んで、論理式Pのアポーハ論的意味（artha）を次のように定義した。（肩付Cは補集合を表す。他の記号の意味については注記参照[1)]。）

$$\underline{\mathrm{artha}(P) := \mathrm{cov}((h[P])^{C}).}$$

この定義は語Pの“外延”の補集合をPの排除対象（語Pが適用できない対象の集合）と見て、それが何と何から構成されているか（被覆—covering—と呼ぶ）をPの“意味（artha）”と定めるものである。我々はこの定義を用いて、A, Bを論理式（拡大された語）とするとき、「AはBの下位語である」あるいは「BはAの上位語である」ことを、artha（A）⊇ artha（B）と定義する[2)]。すると、次の同値関係が成り立つ。（証明は注に譲る[3)]）。

$$\mathrm{artha}(A) \supseteq \mathrm{artha}(B) \iff h[A] \subseteq h[B]$$

うえだのぼる：看護学部看護学科教授

これは下位語・上位語は語の“外延”の狭・広と一致することを意味する。

一般に論理式A, Bついて、[A]⊆[B] ならばh [A]⊆h[B] であるが、逆は必ずしも成り立たない（具体的な例は省略する）。つまり、論理式A, Bについて [A]⊆[B] であることは、当該の語群上でAがBの下位語であるための十分条件ではあるが必要条件ではない。

しかし、次のことを示すことができる。（A, Bはp, q, r,... を命題変項とする論理式とする。）

(*) 任意の語群の任意の語によるp, q, r,...への代入でh [A]⊆h[B] が成り立つならば、任意の語群の任意の語によるp, q, r,...への代入で [A]⊆[B] が成り立つ。（逆命題は明らかである。）

(*) は、論理式A,Bについて、命題変項への任意の語群における任意の代入で（以下、下線部を「任意の語群で」と略記する）[A]⊆[B] であることは、任意の語群でAがBの下位語（BはAの上位語）であることの必要十分条件であることを意味する。例えば、pを命題変項とするとき、任意の語群で [p]⊆[nonnonp] が成り立つ。同様に、p,qを命題変項とするとき、[non(p∨q)]＝[nonp∧nonq] が任意の語群で成り立つ。（(*) の証明は注に譲る[4]。）

次節以下ではこのような＜A, B＞、すなわち、任意の語群で [A]⊆[B] が成り立つような＜A, B＞が得られる論理体系を求めることを考える。

2. BLの健全性

論理式Pに現れる命題変項を$p_1, p_2,\dots,p_n$（n≧1）とする。論理式Pに対して、語群＜ω, U＞上の付値を次のように与える（「付値」については注1参照）。

$\omega=\{X_1, X_2,\dots,X_k\}$(k≧2)とする。Pに現れるすべての命題変項$p_i$(1≦i≦n)に$X_j$(1≦j≦k) のいずれかを代入して得られる論理式を$P[X_{j1}/p_1, X_{j2}/p_2,\dots,X_{jn}/p_n]$ で表わす（X_{ji}はいずれかのX_jである）。

例えば、Pが (p∨q)∧(nonp∨nonq)、ω＝{X, Y, Z}のとき、P[X/p, X/q]＝ (X∨X)∧(nonX∨nonX), P[X/p, Y/q]＝(X∨Y)∧(nonX∨nonY), P[Z/p, Y/q]＝(Z∨Y)∧(nonZ∨nonY) など。そして、それらの付値すなわち［(X∨Y)∧(nonX∨nonX)］などを当該の語群上で与える。

いま、命題論理学の体系としてGentzenのLK（古典論理）を採る。LKの式（sequent）

$$A_1, A_2,\dots, A_m \rightarrow B_1, B_2,\dots B_n$$

に対する付値を次のように定義する。

$$[A_1, A_2,\dots,A_m \rightarrow B_1, B_2,\dots B_n] := [A_1\wedge A_2\wedge\dots\wedge A_m]^c \cup [B_1\wedge B_2\vee\dots\vee B_n].$$

すると、

$$[A_1, A_2,\dots,A_m \rightarrow B_1, B_2,\dots B_n] = \omega \Leftrightarrow [A_1\wedge A_2\wedge\dots\wedge A_m]\subseteq[B_1\vee B_2\vee\dots\vee B_n]$$

ただし、式の左辺と右辺に現れる同一の命題変項には同一の語を代入するものとする。

なお、$m = 0$のとき、$[\ \to\ B_1, B_2, \ldots\ldots B_n] := [B_1 \vee B_2 \vee \ldots\ldots \vee B_n]$、$n = 0$のとき、$[A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m \to\ ] := [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_m]^c$とする。(LKは無矛盾。すなわち、式 $\to$ は証明図に現れない。Cf. 竹内・八杉 p.50.)

所与の語群$< \omega, U >$(ωは有限集合とする)上の任意の付値によって、恒に式 $\Gamma \to \Delta$(ここで、Γ, Δはそれぞれ有限個の論理式の列)の付値［$\Gamma \to \Delta$］が語全体ωであるとき、式 $\Gamma \to \Delta$ を語群$< \omega, U >$で「恒真」と呼ぶ。そして任意の語群で恒真な式 $\Gamma \to \Delta$ を「恒等的」と呼び、［$\Gamma \to \Delta$］$\equiv \omega$で表わす。

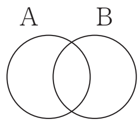
LKの推論規則は、唯一の例外を除いて、上式の付値がωであるとき下式の付値がωになる[5)]。その唯一の例外は否定右規則である。実際、LKの否定右規則の特殊な場合と言えるLJ(直観主義論理)の否定右規則は、上式の付値がωであっても下式の付値はωとは限らない。例えば下の語群($< \omega = \{A, B\}, U = \{S_1, S_2, S_3\} >$)の場合、$[A] = \{A\}$, $[B] = \{B\}$, $[\mathrm{nonA}] = [\mathrm{nonB}\} = \phi$, $[A \wedge B] = \phi$ であるから、LJの否定右:

$$\frac{A, B \to}{B \to \mathrm{nonA}}$$

の上式の付値は［$A, B \to\ ] = [A \wedge B]^c = \phi^c = \omega\ (= \{A,B\})$ であるが、下式の付値は［$B \to \mathrm{nonA}] = [B]^c \cup [\mathrm{nonA}] = \{A\} \cup \phi = \{A\} \neq \omega$である。

	S_1	S_2	S_3
A	○	○	×
B	×	○	○

語群



左の語群のオイラー図

上式の付値がωのとき恒に下式の付値がωであるためには、LKの否定右規則に替えてどのような規則を導入すればよいであろうか。

まず、アポーハ代数における否定について、次のことは既知である。

S(ω)を任意のアポーハ代数とするとき、

$\forall \alpha, \beta \in S(\omega)$ について、$\alpha \subseteq gh(\beta) \Leftrightarrow \beta \subseteq gh(\alpha)$.(証明は上田・平林2012 参照)

このことは、P, Qを命題(拡大された語)とするとき、

$$[P \to \mathrm{nonQ}] \equiv \omega \Leftrightarrow [Q \to \mathrm{nonP}] \equiv \omega$$

が成り立つことを意味する。また、

$$[P \to \quad] \equiv \omega \Rightarrow [\ \to \mathrm{non}P] \equiv \omega$$

が成り立つことは容易に分かる[6)]。

そこで、否定に関する次の二つの規則を考える。

ルール①　　ルール②

$$\frac{P \to \mathrm{non}Q}{Q \to \mathrm{non}P} \qquad\qquad \frac{P \to \quad}{\to \ \mathrm{non}P}$$

（ルール②はLJの否定右の特殊な場合—上式の左辺にただ一つの命題が現れる場合—に対応する。）

我々は次の論理体系をBLと呼ぶ。

LKから含意左、含意右、否定右規則を取り除き、替えてルール①およびルール②を導入した体系

BLにおいて、始式（証明図の最初の式）は、次の形である。

$P \to P$　（Pは任意の論理式。$\mathrm{non}P \to \mathrm{non}P$ も始式として認める。）

明らかに、任意の語群上で $[P \to P] = [P]^c \cup [P] = \omega$ である。すなわち、式 $P \to P$ は「恒等的」（$[P \to P] \equiv \omega$）である。従って、BLにおいては、証明図の上式が恒等的、すなわち任意の語群上で恒真（付値が恒にω）ならば、下式も恒等的である。つまり、BLで証明可能な式は恒等的である。我々はこのことをBLの健全性と呼ぶ。

3. AL完全性

BLのルール①は次のようにしてLJ（直観主義論理）の否定右の成り立つ体系で導出できる。

$$\cfrac{\cfrac{P \to \mathrm{non}Q \qquad \cfrac{Q \to Q}{\mathrm{non}Q, Q \to}}{P, Q \to}\ \text{cut}}{Q \to \mathrm{non}P}\ \text{否定右}$$

ルール②はLJの否定右の特殊な場合であるから、BLにおけるルール①及び②に替えて（LJの）否定右規則を採用する論理体系を考えることができる。この体系をALと呼ぶ。ALが妥当するためには、当該の語群上で論理式（拡大された語）P, Qについて、$[P \wedge Q] = [P] \cap [Q] = \phi$ ならば、$[Q] \subseteq [\mathrm{non}P]$（および$[P] \subseteq [\mathrm{non}Q]$）が成り立つことが必要である。

いま語群ωを所与とするとき、任意の二つの語$A, B \in \omega$ について、1）$[A \wedge B] = [A] \cap [B] = \phi$ ならば、$[A] \subseteq [\mathrm{non}B]$（および $[B] \subseteq [\mathrm{non}A]$）が成り立つとする。このとき、論理式

（拡大された語）P, Qについて、2）<u>$[P \wedge Q]=[P] \cap [Q]=\phi$ならば、$[Q] \subseteq [nonP]$（および $[P] \subseteq [nonQ]$）</u>が成り立つ。

証明

1）の下線部はωの任意の二語A, Bについて、$[A] \cap [B] \neq \phi$ または $[A] \subseteq [nonB]$ を意味する。論理式P, Qについて、$[P \wedge Q]=[P] \cap [Q]=\phi$ とする。$[P]=\{A, B, \ldots\}$（$A, B, \ldots \in \omega$）, $[Q]=\{C, D, \ldots\}$（$C, D, \ldots \in \omega$）とする。このとき、$[P]=[A] \cup [B] \cup \ldots$, $[Q]=[C] \cup [D] \cup \ldots$ である（(*) の証明参照）。$h[P]=M(A) \cup M(B) \cup \ldots$, $h[Q]=M(C) \cup M(D) \cup \ldots$ だから、

$$h[P] \cap h[Q]=(M(A) \cup M(B) \cup \ldots) \cap (M(C) \cup M(D) \cup \ldots)$$
$$=(M(A) \cap M(C)) \cup (M(A) \cap M(D)) \cup \ldots \cup (M(B) \cap M(C)) \cup (M(B) \cap M(D)) \cup \ldots$$

ここで、選言肢の少なくとも一つが空でない、たとえば$M(A) \cap M(C) \neq \phi$ ならば、証明冒頭の下線部より、$[A] \cap [C] \neq \phi$.（なぜなら、もし$[A] \subseteq [nonC]$ならば、$M(A) \cap M(C)=\phi$ である。）従って、

$[P] \cap [Q]=([A] \cap [C]) \cup ([A] \cap [D]) \cup \ldots \cup ([B] \cap [C]) \cup ([B] \cap [D]) \cup \ldots \neq \phi$.

いま、$[P] \cap [Q]=\phi$ だから矛盾。ゆえに$M(A) \cap M(C)=\phi$.

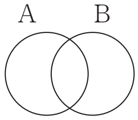
つまり、全ての選言肢$=\phi$.

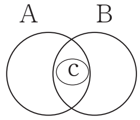
ゆえに、$h[P] \cap h[Q]=(M(A) \cap M(C)) \cup \ldots=\phi$. よって、$[P] \subseteq gh[Q]=[nonQ]$、および$[Q] \subseteq gh[P]=[nonP]$.

すなわち、2）の下線部が成り立つ。

証明終わり

上の証明の下線部は当該の語群$<\omega, U>$において、A, B($\in \omega$) の外延が次の左図のようなオイラー図で表せるとき、必ず $[A \wedge B]=[A] \cap [B] \neq \phi$であることを意味する。すなわち、A,Bには共通の下位語が存在することを意味する。つまり、語$C \in \omega$が存在して、$M(C) \subseteq M(A) \cap M(B)$ であることを意味する（右図）。($M(C)=M(A) \cap M(B)$ である必要はない。)





語の集合ωの任意の二語A,Bについて、<u>$[A] \cap [B] \neq \phi$ または $[A] \subseteq [nonB]$</u> が成り立つような語群を<u>AL語群</u>と呼ぶ。語群は常にAL語群にすることができることは明らかである。上のオイラー図で言えば、$M(A) \cap M(B)$ に含まれる対象を外延に持つ語をCとして語群ωに追

加することができる。「青」と「蓮華」の共通部分の対象を「青蓮華」と呼ぶ如きである。

AL語群の例として、いわゆる伝統的論理学の論議領域のモデルとして考えられたUniverse*I*が挙げられるであろう（上田2015）[7]。また以下で、ALの完全性（AL完全性）の証明のために用いる語群＜ω^{**}, M^{**}＞もまたAL語群である。

BLで証明可能な式が恒等的である（BLの健全性）ように、ALで証明可能な式は明らかに任意のAL語群上で恒真—付値が恒にω（最大元）—である。これを<u>AL恒等的</u>と呼ぶ。つまり、ALで証明可能な式はAL恒等的である。我々はこのことを<u>AL健全性</u>と呼ぶ。しかし、後述するように、ALについて健全性一般は成り立たない。すなわち、ALで証明可能な式は一般的な語群上では必ずしも恒等的ではない。

さて、式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ がAL恒等的であることを、$[\Gamma \rightarrow \Delta] \equiv \omega_{AL}$で表わす。このとき、次の定理が成り立つ。

定理（AL完全性）：$[\Gamma \rightarrow \Delta] \equiv \omega_{AL}$ならば、$\Gamma \rightarrow \Delta$ はALで証明可能である。

以下この定理を証明する[8]。一般に、Γが論理式の列$A_1,\ldots,A_m$であるとき、$A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$を$\Gamma_*$によって表わす（$\Gamma = \phi$のときは$\Gamma_* = \phi$とする）。また$A_1 \vee \ldots \vee A_m$を$\Gamma^*$によって表わす（$\Gamma = \phi$のときは$\Gamma^* = \phi$とする）。また、論理式Aの部分論理式全体の集合を$\Psi$(A) で表わす[9]。そして、$\Gamma_*$あるいは$\Delta^*$の部分論理式全体の集合 $\Psi(\Gamma_*) \cup \Psi(\Delta^*)$ を$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ と書くことにする。明らかに$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ は有限集合である。$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ の部分集合UおよびVに対して、Uに属する有限個の論理式$A_1, \ldots, A_m$とVに属する有限個の論理式$B_1, \ldots, B_n$をどのように選んでもALで式

$$A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$$

が証明可能でないとき、(U, V) は（ALで）無矛盾であるといい、さらに$U \cup V = \Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$であるとき、(U, V) は（ALで）$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ -極大無矛盾であるという。

次の補助定理1が成り立つ（証明は小野p.168−169を参照。この証明は直接には様相論理に関連する補助定理として証明がなされているが、そのままALに対しても通用できる）。

補助定理1

対 (U_0, V_0) が無矛盾のとき、$U_0 \subseteq U$ かつ$V_0 \subseteq V$ となる$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ の部分集合UとVが存在して、(U, V) は$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ -極大無矛盾になる。

M^*を (U,V) が$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ −極大無矛盾であるような部分論理式の集合Uすべてを要素とする集合、すなわち$M^* = \{U(\subseteq \Psi(\Gamma_*, \Delta^*)) \mid (U, \Psi(\Gamma_*, \Delta^*) - U)$ は$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ −極大無矛盾$\}$とする。このとき、次の補助定理2が成り立つ（小野p.225参照）。

補助定理２

1）論理式$A_1, \ldots, A_m$がUに属しBが$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ に属すとき、式$A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ がALで証明可能ならばBもUに属する。

2）$B\wedge C \in \Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ のとき、$B\wedge C \in U \Leftrightarrow B \in U$ かつ $C \in U$

3）$B\vee C \in \Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ のとき、$B\vee C \in U \Leftrightarrow B \in U$ または $C \in U$

4）$\mathrm{non}B \in \Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ のとき、$\mathrm{non}B \in U \Leftrightarrow U \subseteq V$ となるすべての$V \in M^*$に対し$B \notin V$

補助定理２の　証明

$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*) - U$を$U^c$で表わす。

1）(U, U^c) は極大無矛盾であるから、$B \notin U$ならば、式$A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ は証明可能でない。

2）$B\wedge C \in U$のとき。

$$\dfrac{\dfrac{B \rightarrow B}{B, C \rightarrow B}}{B\wedge C \rightarrow B}$$

つまり、$B\wedge C \rightarrow B$ は（ALで）証明可能である。1）により$B \in U$. 同様に、$B\wedge C \rightarrow C$ は証明可能であるから$C \in U$.

逆に、$B \in U$ かつ $C \in U$ のとき。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \rightarrow B}{C, B \rightarrow B}}{B, C \rightarrow B} \qquad \dfrac{C \rightarrow C}{B, C \rightarrow C}}{B, C \rightarrow B\wedge C}$$

つまり、$B, C \rightarrow B\wedge C$　は証明可能である。ゆえに、1）により、$B\wedge C \in U$.

3）$B\vee C \in U$ のとき。

まず、次の証明図が示すように $B\vee C \rightarrow B, C$ はALで証明可能である。

$$\dfrac{\dfrac{B \rightarrow B}{B \rightarrow B, C} \qquad \dfrac{\dfrac{C \rightarrow C}{C \rightarrow C, B}}{C \rightarrow B, C}}{B\vee C \rightarrow B, C}$$

$B \notin U$ とする。すると、$(U, \{B\})$ は無矛盾。このとき、$(U, \{B, C\})$ と $(U \cup \{C\}, \{B\})$ の少なくとも一方は無矛盾でなければならない（なぜなら、ともに無矛盾でないなら、Cをcut論理式として、cutによって、Uの論理式の列からBが証明できることになり、$(U, \{B\})$ が無矛盾でないことになる。Cf. 小野p.168-169）。そして、$B\vee C \in U$ であり、かつ $B\vee C \rightarrow B, C$ は上に示したように証明可能であるから、$(U, \{B, C\})$ は無矛盾ではない。従って、$(U \cup \{C\}, \{B\})$ が無矛盾でなければならない。(U, U^c) は極大無矛盾で

あるから、$C \notin U$ すなわち $C \in U^c$ ならば、$B, C \in U^c$ となるから、$(U, \{B, C\})$ が無矛盾である。これは下線部分と矛盾する。ゆえに、$C \in U$ である。

$C \notin U$ の場合、全く同様にして、$B \in U$ である。

逆に、$B \in U$ または $C \in U$ ならば、$B \vee C \in U$ を示す。

$B \in U$ とする。$B \to B \vee C$ は証明可能であるから、1）により $B \vee C \in U$.

$C \in U$ の場合も、同様にして、$B \vee C \in U$.

4）$\mathrm{non}B \in U \Leftrightarrow U \subseteq V$ なる全ての $V \in M^*$ に対し $B \notin V$.

$\mathrm{non}B \in U$ とする。$U \subseteq V$ だから $\mathrm{non}B \in V$ である。$\mathrm{non}B, B \to$ は証明可能な式であるから、$B \in V$ ならば、$\mathrm{non}B, B \in V$ となり、$V \in M^*$ であることに矛盾する。ゆえに、$B \notin V$.

逆に、$U \subseteq V$ なる全ての $V \in M^*$ に対し $B \notin V$ とする。

いま $\underline{\mathrm{non}B \notin U}$ と仮定する。すると $(U, \{\mathrm{non}B\})$ は無矛盾。ここで、$(U \cup \{B\}, \{\mathrm{non}B\})$ が無矛盾でないと仮定する。$\Gamma, B \to \mathrm{non}B$ が証明可能（Γ は U の要素である論理式の列）。従って、次の証明図（概略）が書ける。

$$\underline{\mathrm{non}B \to \mathrm{non}B}$$
$$\underline{B \to \mathrm{nonnon}B} \qquad \underline{\mathrm{non}B \to \mathrm{non}B}$$
$$\underline{\Gamma, B \to \mathrm{non}B \quad \Gamma, B \to \mathrm{nonnon}B} \qquad \underline{\mathrm{non}B, \mathrm{nonnon}B} \to$$
$$\underline{\Gamma, B \to \mathrm{non}B \wedge \mathrm{nonnon}B \qquad \mathrm{non}B \wedge \mathrm{nonnon}B} \to$$
$$\underline{\Gamma, B \to}$$
$$\Gamma \to \mathrm{non}B$$

ゆえに、1）により、$\mathrm{non}B \in U$. これは第一の仮定（下線部分）と矛盾する。（なお、証明図の最終でLJの否定右規則が使われている。）よって、$(U \cup \{B\}, \{\mathrm{non}B\})$ は無矛盾である。すると、M^* の要素 V が存在して $U \cup \{B\} \subseteq V$ であるが、これは前提 $B \notin V$ と矛盾する。ゆえに、第一の仮定は否定される。すなわち、$\mathrm{non}B \in U$.

補助定理２の　証明終わり

さて、語群 $< \omega^*, M^* >$ を考える。ここで、ω^* は $\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$（Γ_* または Δ^* に現れる部分論理式全体）であり、M^* は (U, U^c) が $\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ −極大無矛盾であるような部分論理式の集合 U すべてを要素とする集合、すなわち $M^* = \{U(\subseteq \Psi(\Gamma_*, \Delta^*)) \mid (U, \Psi(\Gamma_*, \Delta^*) - U)$ は $\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ −極大無矛盾$\}$.

$U \in M^*$ とする。部分論理式 $A \in \omega^*$ について、$A \in U$ のとき、そしてそのときに限って、$U \in M(A)$（対象 U は語 A の外延に含まれる）とする（「対象 U は語 A を名前として持つ」と読む）。

すなわち語群 $< \omega^*, M^* >$ において次が成り立つ。

ω^* の任意の要素 A および、M^* の任意の要素 U について、$U \in M(A) \Leftrightarrow A \in U$.

（ただし、$U \in M(A)$ における A は語であり、$A \in U$ における A は論理式である。した

がって、$A \in U \in M(A)$ なる関係は無意味である。)

語群 $\langle \omega^*, M^* \rangle$ の語の集合ω^*を次のように拡大する。任意の$B,C \in \omega^*$について、$B \wedge C \notin \omega^*$ ならば、$B \wedge C$を追加すべき語とする。任意の$B, C, D \in \omega^*$について、$B \wedge C \wedge D \notin \omega^*$ ならば、$B \wedge C \wedge D$を追加すべき語とする。同様に$n(\geqq 2)$ 個の語(部分論理式)の積がω^* の要素でないならば、その論理式を追加すべき語とする。このようにして追加すべき全ての語によって拡大された集合をω^{**}で表す。

補助定理1と同様のことがω^{**}について成り立つ。すなわち、

補助定理1' 対 (U_0, V_0) が無矛盾のとき、$U_0 \subseteq U$ かつ$V_0 \subseteq V$ となるω^{**}の部分集合UとVが存在して、(U, V) はω^{**}-極大無矛盾になる $(U \cup V = \omega^{**})$。

M^{**}を (U,V) がω^{**}-極大無矛盾であるような論理式の集合Uすべてを要素とする集合、すなわち$M^{**} = \{U(\subseteq \omega^{**}) \mid (U, \omega^{**} - U)$ はω^{**}-極大無矛盾$\}$とする。このとき、ω^{**}について、先の補助定理2が($\Psi(\Gamma_*, \Delta^*)$ をω^{**}に替えて)成り立つことも明らかである(補助定理2')。

補助定理2'

1)論理式$A_1, ..., A_m$がUに属しBがω^{**}に属すとき、式$A_1, ..., A_m \rightarrow B$ がALで証明可能ならばBもUに属する。

2)$B \wedge C \in \omega^{**}$のとき、$B \wedge C \in U \iff B \in U$ かつ $C \in U$

3)$B \vee C \in \omega^{**}$のとき、$B \vee C \in U \iff B \in U$ または $C \in U$

4)$\mathrm{non}B \in \omega^{**}$のとき、$\mathrm{non}B \in U \Leftrightarrow U \subseteq V$ となるすべての$V \in M^{**}$に対し$B \notin V$

ω^{**}とM^{**}から語群$\langle \omega^{**}, M^{**} \rangle$を次の定義によって作る。

ω^{**}の任意の要素Aおよび、M^{**}の任意の要素Uについて、$A \in U$ のとき、そしてそのときに限って、$U \in M(A)$ とする。つまり、$\underline{U \in M(A) \Leftrightarrow A \in U}$ が成り立つ。

いま p, q を命題変項として、式 $p \vee q \rightarrow p$ を取り上げる。この式は明らかに(ALで)証明可能でない。また$\omega^* = \Psi(p \vee q, p) = \{p, q, p \vee q\}$, $\omega^{**} = \{p, q, p \vee q, p \wedge q, p \wedge (p \vee q), q \wedge (p \vee q)\}$ である。ここで、ω^{**}のどの要素Aについても$p \wedge q \rightarrow A$ が証明可能であるから、ω^{**}-極大無矛盾であるような論理式の集合で$p \wedge q$を含むものは存在しない。すなわち、$M(p \wedge q) = \phi$である。

一般に、ω^{**}は、その外延がϕであるところの語を含む。我々は外延がϕである語$X \in \omega^{**}$については、その付値 $[X]$をϕと定める 。

語群$\langle \omega^{**}, M^{**} \rangle$について考察する。

1. 補助定理2’から、次のことが成り立つ。

    1-1. $B \wedge C \in \omega^{**}$のとき、$M(B \wedge C) = M(B) \cap M(C)$ （$B \wedge C$は部分論理式とは限らない。また、$M(B \wedge C) = \phi$の場合もある。）

    1-2. $B \vee C \in \omega^{**}$のとき（$B \vee C$は部分論理式である）、$M(B \vee C) = M(B) \cup M(C)$

    1-3. $\mathrm{nonB} \in \omega^{**}$のとき（nonBは部分論理式である）、$M(\mathrm{nonB}) = \mathrm{hgM}(B)$

1-1. は補助定理2'の2）から明らか。1-2. は同じく3）より。1-3. は次の通りである。

$M(\mathrm{nonB}) \cap M(B) = \phi$（$\exists V \in M^{**}$, $V \in M(\mathrm{nonB}) \cap M(B)$ ならば、$\mathrm{nonB}, B \in V$となってしまう）から、$\mathrm{nonB} \in \mathrm{gM}(B)$. ゆえに、$M(\mathrm{nonB}) \subseteq \mathrm{hgM}(B)$.

一方、$\mathrm{hgM}(B) \subseteq M(\mathrm{nonB})$ は以下のようにして証明できる。

証明

$U \in \mathrm{hgM}(B)$ とする。すると、

$\exists A \in \omega^{**}$, $M(A) \cap M(B) = \phi$ かつ $U \in M(A)$.

$\mathrm{nonB} \notin U$と仮定する。補助定理2'の4）により、$\exists V \in M^{**}$, $U \subseteq V$ かつ $B \in V$.

言い換えると、

$U \notin M(\mathrm{nonB})$ と仮定すると、$\exists V \in M^{**}$, $U \subseteq V$ かつ $V \in M(B)$.

$U \in M(A)$ だから$A \in U$. $A \in U \subseteq V$ より、$A \in V$　すなわち$V \in M(A)$.

従って、$V \in M(A) \cap M(B)$ となって、$M(A) \cap M(B) = \phi$と矛盾する。ゆえに、仮定は否定される。

従って、$U \in M(\mathrm{nonB})$.

ゆえに、$\mathrm{hgM}(B) \subseteq M(\mathrm{nonB})$.

証明終わり

$M(\mathrm{nonB}) \subseteq \mathrm{hgM}(B)$ かつ $\mathrm{hgM}(B) \subseteq M(\mathrm{nonB})$ より、$M(\mathrm{nonB}) = \mathrm{hgM}(B)$.

以下、語X($X \in \omega^{**}$) について、語群$<\omega^{**}, M^{**}>$上の付値を $[X]_0$で表す（なお$h[X]_0 = M(X)$ である）。

2. $B \in \omega^{**}$について、$[\mathrm{nonB}]_0 = \mathrm{gM}(B)$

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{nonB}]_0 &= \{Z \in \omega^{**} \mid M(Z) \subseteq M(\mathrm{nonB})\} \\
&= \{Z \in \omega^{**} \mid M(Z) \subseteq \mathrm{hgM}(B)\} \ (\text{1-3.より}\ M(\mathrm{nonB}) = \mathrm{hgM}(B)) \\
&= \{Z \in \omega^{**} \mid M(Z) \cap M(B) = \phi\} \\
&= \mathrm{gM}(B)
\end{aligned}
$$

3. $B, C \in \omega^{**}$について、$[B \wedge C]_0 = [B]_0 \cap [C]_0$

$[B\wedge C]_0 = \{Z\in\omega^{**} \mid M(Z)\subseteq M(B\wedge C)\}$

$= \{Z\in\omega^{**} \mid M(Z)\subseteq M(B)\cap M(C)\}$ （1-1.より $M(B\wedge C) = M(B)\cap M(C)$）

$= \{Z\in\omega^{**} \mid M(Z)\subseteq M(B)\}\cap\{Z\in\omega^{**} \mid M(Z)\subseteq M(C)\}$

$= [B]_0\cap[C]_0$

4. $B\wedge C \in\omega^{**}$について、$h[B\wedge C]_0 = h[B]_0\cap h[C]_0$

$h[B\wedge C]_0 = M(B\wedge C) = M(B)\cap M(C) = h[B]_0\cap h[C]_0$

5. 3. と4. から、$B,C \in\omega^{**}$について、$\underline{h([B]_0\cap[C]_0) = h[B\wedge C]_0 = h[B]_0\cap h[C]_0}$

6. 語群＜ω^{**}, M^{**}＞はAL語群である、即ち、任意の$B,C\in\omega^{**}$について、$[B]_0\cap[C]_0 \neq \phi$ または$[B]_0\subseteq[nonC]_0$ である。

$h[B]_0 = M(B)$, $h[C]_0 = M(C)$, $M(B\wedge C) = M(B)\cap M(C)$ より、$B\wedge C \in[B]_0\cap[C]_0$. よって、$[B]_0\cap[C]_0 = \phi$ならば、5.より$M(B)\cap M(C) = \phi$すなわち$B \in gM(C) = [nonC]_0$ であるから、$[B]_0\subseteq[nonC]_0$.

さて、$A\in\omega^{**}$とするとき、Aを論理式と見て命題変項をそれと同一の文字（アルファベット）に置き換えた後の＜ω^{**}, M^{**}＞上の付値を［A］で表わし、一方Aを語群の要素たる語と見たときの＜ω^{**}, M^{**}＞上の付値を［A］$_0$で表わす。命題変項pについては、$[p] = [p]_0$が成り立つ。

例えば、$A = (p\vee q)\wedge non(p\wedge nonq)$ のとき、$[A] = A[p/p,q/q]$の付値$= [(p\vee q)\wedge non(p\wedge nonq)] = [p\vee q] \cap[non(p\wedge nonq)] = ([p] \cup[q]) \cap gh[p\wedge nonq] = ([p] \cup[q]) \cap gh([p] \cap [nonq]) = ([p]\cup[q])\cap gh([p]\cap gh[q]) = ([p]_0\cup[q]_0)\cap gh([p]_0\cap gh[q]_0)$ となる。

この様に、A（$\in\omega^{**}$ ）の付値はAの部分論理式の付値に“分解”される。そしてこの分解は最終的には命題変項の付値 $[p]_0$, $[q]_0$, $[r]_0$, …に至る。

式 Γ → Δ の語群＜ω^{**}, M^{**}＞上の付値を次のように行う。

まず、式に現れる命題変項それぞれをω^{**}に現れる<u>同一の文字（語）</u>で置き換える。

$(\Gamma^* \rightarrow \Delta^*)[p/p, q/q, r/r, \ldots]$.

次いで、この式の＜ω^{**}, M^{**}＞上の付値を与える。

$[(\Gamma^* \rightarrow \Delta^*)[p/p, q/q, r/r, \ldots]]$.

$\Gamma^*[p/p,q/q,r/r,\ldots]$ をBで、$\Delta^*[p/p,q/q,r/r,\ldots]$ をCで表せば、

$[(\Gamma^* \rightarrow \Delta^*)[p/p, q/q, r/r, \ldots]] = [B]^c\cup[C]$.

このように、論理式Aにおける記号∧,∨,nonはここでは論理記号として機能し、Aの付値［A］は命題変項の付値の（多変数）関数値として得られる。そして、$[p]_0$, $[q]_0$等はω^{**}の要素（語）から成る集合である。たとえば、$[p]_0 = \{p, r ,p\wedge q, \ldots\}$, $[q]_0 = \{q, s, s\vee nonp, \ldots\}$ といっ

た具合である。ここで $p\wedge q$ や $s\vee nonp$ における記号∧, ∨, non は論理記号として機能することはなく、語（名前）の一部分を構成する記号でしかない。例えば、$p\wedge q\in\omega^{**}$ のとき、$[p\wedge q]$ を $(p\wedge q)[p/p, q/q]$ の付値とすれば、$[p\wedge q]=[p]\cap[q]$ となるが、他方 $p\wedge q$ を ω^{**} における語と見れば、語群 $<\omega^{**}, M^{**}>$ 上の付値 $[p\wedge q]_0$ は関数coreによって得られる集合である。

補助定理3

式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ から作られる語群 $<\omega^{**}, M^{**}>$ 上の付値に関連して次が成り立つ。

任意の論理式 $A\in\omega^{**}$ に対し、$h[A]=M(A)$.

補助定理3の　証明

まず、一般に $nonB\in\omega^{**}$ について、$[nonB]=[nonB]_0$ が成立する。

証明

論理式における否定の「深さ（nesting）」を次のように定義する。

論理式がnonを一つも含まないとき、当該論理式の否定の深さ ＝ 0 とする。論理式Xの否定の深さが $k(\geqq 0)$ のとき、nonXの否定の深さを $k+1$ とする。また、論理式 $X\vee Y$ あるいは $X\wedge Y$ の否定の深さはmax(Xの否定の深さ, Yの否定の深さ）とする。例えば、p, q を命題変項とするとき、$non(p\wedge non(p\vee nonq))\wedge(nonp\vee q)$ の否定の深さは3である。

$[nonB]=[nonB]_0$ であることをBにおける否定の深さnについての帰納法によって示す。

$n=0$ のとき。

命題変項 p, q 等については、$[p]=[p]_0$, $[q]=[q]_0$ 等が成り立つ。従って、必要があれば<u>分配法則を繰り返し用いて</u>、

$$[B]=([p]_0\cap\ldots\cap[q]_0)\cup([r]_0\cap\ldots\cap[s]_0)\cup\ldots$$

の形（論理和標準系）にできる。（このとき、$p\wedge\ldots\wedge q$, $r\wedge\ldots\wedge s$ 等は部分論理式とは限らない。）

任意の命題変項p,...,qについて、上の5. より、$h([p]_0\cap\ldots\cap[q]_0)=h([p\wedge\ldots\wedge q]_0)=h[p]_0\cap\ldots\cap h[q]_0$ だから、

$[nonB]=gh[B]$

$$\begin{aligned}
&=gh(([p]_0\cap\ldots\cap[q]_0)\cup([r]_0\cap\ldots\cap[s]_0)\cup\ldots)\\
&=g((h[p]_0\cap\ldots\cap h[q]_0)\cup(h[r]_0\cap\ldots\cap h[s]_0)\cup\ldots)\\
&=g((M(p)\cap\ldots\cap M(q))\cup(M(r)\cap\ldots\cap M(s))\cup\ldots)
\end{aligned}$$

ここで、分配法則を下線の時とは逆に用いれば（分配法則をn回用いて、状態0 → 状

態1 → 状態2 → … → 状態n に至ったとするとき、分配法則を逆向きにn回用いて、状態n → 状態n-1 → 状態n-2 → … → 状態0 に至る)、gM(B) に至る。

上の2.で示したように、gM(B) = $[\mathrm{nonB}]_0$であるから、[nonB] = gM(B) = $[\mathrm{nonB}]_0$.

Bにおける否定の深さnがk(≧0) 以下のとき、[nonB] = $[\mathrm{nonB}]_0$ であると仮定する。

n = k+1 のとき。

[nonB] = gh[B]

論理式B∈ω^{**}について、Bにおける否定記号nonの内側に含まれていない(nonの作用が及ばない) 命題変項p, q, …をそれぞれ $[p]_0$, $[q]_0$…に、また同様に∧を∩に、∨を∩に置き換える。必要があれば分配法則を繰り返し用いて、

[B]を、$[p]_0 \cap [q]_0 \cap \dots \cap [\mathrm{nonC}]_0 \cap [\mathrm{nonD}]_0 \cap \dots$の形(論理積)の有限個の和集合(論理和)として表せる(nonC, nonD, …について、それらの否定の深さはいずれもk以下である)。従って、

$$gh[B] = gh(([p]_0 \cap [q]_0 \cap \dots \cap [\mathrm{nonC}]_0 \cap [\mathrm{nonD}]_0 \cap \dots) \cup ([r]_0 \cap [s]_0 \cap \dots \cap [\mathrm{nonE}]_0 \cap [\mathrm{nonF}]_0 \cap \dots) \cup \dots)$$

の形にできる。

$$\begin{aligned} gh[B] &= g(h([p]_0 \cap [q]_0 \cap \dots \cap [\mathrm{nonC}]_0 \cap [\mathrm{nonD}]_0 \cap \dots) \cup h([r]_0 \cap [s]_0 \cap \dots \cap [\mathrm{nonE}]_0 \cap [\mathrm{nonF}]_0 \cap \dots) \cup \dots) \\ &= g((h[p]_0 \cap h[q]_0 \cap \dots \cap h[\mathrm{nonC}]_0 \cap h[\mathrm{nonD}]_0 \cap \dots) \cup (h[r]_0 \cap h[s]_0 \cap \dots \cap h[\mathrm{nonE}]_0 \cap h[\mathrm{nonF}]_0 \cap \dots) \cup \dots) \\ &= g((M(p) \cap M(q) \cap \dots \cap M(\mathrm{nonC}) \cap M(\mathrm{nonD}) \cap \dots) \cup (M(r) \cap M(s) \cap \dots \cap M(\mathrm{nonE}) \cap M(\mathrm{nonF}) \dots) \cup \dots) \end{aligned}$$

ここで、分配法則を下線の時とは逆向きに用いれば、gM(B) に至る。

ゆえに、n = k+1 のとき、[nonB] = gM(B) = $[\mathrm{nonB}]_0$.

証明終わり

A∈ω^{**}について、Aにおける否定記号の内側に含まれていない命題変項 p, q,…をそれぞれ $[p]_0$, $[q]_0$…に、また同様に∧を∩に、∨を∩に置き換える。次に、必要があれば分配法則を繰り返し用いて、(任意のnonB∈ω^{**}について [nonB] = $[\mathrm{nonB}]_0$ だから)

[A]を、$[p]_0 \cap [q]_0 \cap \dots \cap [\mathrm{nonB}]_0 \cap [\mathrm{nonC}]_0 \cap \dots$の形(論理積)の有限個の和集合(論理和)として表わす。すなわち、

$[A] = ([p]_0 \cap [q]_0 \cap \dots \cap [\mathrm{nonB}]_0 \cap [\mathrm{nonC}]_0 \cap \dots) \cup ([r]_0 \cap [s]_0 \cap \dots \cap [\mathrm{nonD}]_0 \cap [\mathrm{nonE}]_0 \cap \dots) \cup \dots$

先と同様に

$h[A] = h([p]_0 \cap [q]_0 \cap \ldots \cap [nonB]_0 \cap [nonC]_0 \cap \ldots) \cup h([r]_0 \cap [s]_0 \cap \ldots \cap [nonD]_0 \cap [nonE]_0 \cap \ldots) \cup \ldots$

$= (h[p]_0 \cap h[q]_0 \cap \ldots \cap h[nonB]_0 \cap h[nonC]_0 \cap \ldots) \cup (h[r]_0 \cap h[s]_0 \cap \ldots \cap h[nonD]_0 \cap h[nonE]_0 \cap \ldots) \cup \ldots$

任意の$nonB \in \omega^{**}$について、2.より $[nonB]_0 = gM(B)$, また1-3.より $M(nonB) = hgM(B)$ であるから、

$h[A] = (h[p]_0 \cap h[q]_0 \cap \ldots \cap hgM(B) \cap hgM(C) \cap \ldots) \cup (h[r]_0 \cap h[s]_0 \cap \ldots \cap hgM(D) \cap hgM(E) \cap \ldots) \cup \ldots$

$= (M(p) \cap M(q) \cap \ldots \cap M(nonB) \cap M(nonC) \cap \ldots) \cup (M(r) \cap M(s) \cap \ldots \cap M(nonD) \cap M(nonE) \cap \ldots) \cup \ldots$

ここで、分配法則を下線の時とは逆に辿れば、M(A) に至る。

ゆえに、$h[A] = M(A)$.

補助定理３の　証明終わり

定理（AL完全性）：式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ がAL恒等的（$[\Gamma \rightarrow \Delta] \equiv \omega AL$）ならば、$\Gamma \rightarrow \Delta$ はALで証明可能である。

証明

対偶を証明する。$\Gamma \rightarrow \Delta$がALで証明可能でないと仮定する。まず、部分論理式の集合$\Psi(\Gamma_*, \Delta^*) = \Psi(\Gamma_*) \cup \Psi(\Delta^*)$ をω^*とし、既に述べた手順によって語群$<\omega^{**}, M^{**}>$を作る。$<\omega^{**}, M^{**}>$はAL語群である。仮定により$\Gamma_* \rightarrow \Delta^*$ はALで証明可能でないから[11]、対（$\{\Gamma_*\}, \{\Delta^*\}$）は無矛盾である。補助定理1'によって、$\Gamma_*$を含む$M^{**}$の要素が存在する。それをUとする。すると、$\Gamma_* \in U$. すなわち、$U \in M(\Gamma_*)$. $\Gamma^* \in \omega^{**}$であるから、補助定理3により、$h[\Gamma_*] = M(\Gamma_*)$. 従って、$\underline{U \in h[\Gamma_*]}$. 他方$\Delta^* \in \omega^{**}$であり、かつ$\Delta^* \in U^c$、すなわち $\Delta^* \notin U$であるから、$U \notin M(\Delta^*)$. 補助定理3により、$\underline{U \notin h[\Delta^*]}$. 従って、$[\Gamma_*] \subseteq [\Delta^*]$ は成り立たない（$[\Gamma_*] \subseteq [\Delta^*]$ ならば$h[\Gamma_*] \subseteq h[\Delta^*]$）。つまり語群$<\omega^{**}, M^{**}>$上で $[\Gamma_* \rightarrow \Delta^*] \neq \omega^{**}$.

以上により、$\Gamma \rightarrow \Delta$がALで証明可能でないとき、$[\Gamma \rightarrow \Delta] \not\equiv \omega AL$.

証明終わり

4. BLと完全性

（1）前節の結果（AL完全性）により、A,Bを論理式として, 式 $A \rightarrow B$ について次の含意関係（→で表す）が成り立つ（右向き及び下向きの矢印で示される含意関係は明らか）。

$$\begin{tikzcd}
\text{BLで証明可能} \arrow[r] \arrow[d] & \text{恒等的} \arrow[d] \\
\text{ALで証明可能} \arrow[r, shift left] & \text{AL恒等的} \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

含意関係（図）

恒等的な式はAL恒等的であるから、ALで証明可能である。従って、第1節（[1]）の（*）により、「任意の語群で」AがBの下位語であるような論理式の対＜A,B＞は悉くALによって得られると言うことができる。

（2）n(n≧1）個の語がそれぞれ唯一の対象を外延に持つ語群（＜ω,U＞）をT_nと名づける。例えば語群＜{X, Y, Z}, {a, b, c}＞がT_3であるとき、それは次のように表される。

	a	b	c
X	○	×	×
Y	×	○	×
Z	×	×	○

語群T_nは明らかにAL語群である。またT_nから作られるアポーハ代数 $S(T_n)$ はT_nにおけるUの部分集合全体からなる集合（Uの冪集合）が通常の集合演算（連言、選言、補集合操作としての否定）の下で作るブール代数と同型であることも明らかである。

論理式Aがトートロジーであることと、任意のブール代数Bにおいて、Aに対するB上の任意のブール代数付値がBの最大元であることが同値であることが知られている（小野、p.51）。これを言い換えれば、論理式Aがトートロジーであること（式　→ A がLKで証明可能）と、任意のアポーハ代数 $S(T_n)$ について、Aに対する $S(T_n)$ 上の任意の付値が $S(T_n)$ の最大元であることが同値である。ここで $S(T_n)$ の要素αは、T_nにおけるωの要素（語）を命題変項とする何らかの論理式Pによってα＝[P］と表せるから、下線部分を「語群T_n上の任意の付値」に置き換えることができる（第6節の議論参照)。

いま論理式A,Bについて、式 A → B が任意のT_n上で恒真―T_n上の付値が恒にω―であることをT恒等的と呼べば、式 A → BがLKで証明可能であることと式 A → B がT恒等的であることとは同値になる。

（3）ALで証明可能な式は必ずしも恒等的ではない。例えば次に示すように、p, qを命題変項とするとき、q → non(p∧non(p∧q)）はALで証明可能であるが恒等的ではない。まずALによる証明図（略図）は以下のようになる。

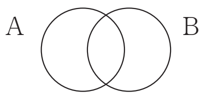
$$\dfrac{\dfrac{p \to p}{p, q \to p} \qquad \dfrac{q \to q}{p, q \to p}}{p, q \to \quad p \wedge q}$$

$$\frac{\dfrac{\mathrm{non}(p\wedge q),\ p,\ q \rightarrow}{p\wedge \mathrm{non}(p\wedge q),\ q \rightarrow}}{q \rightarrow \mathrm{non}(p\wedge \mathrm{non}(p\wedge q))}$$

証明図1

一方、次の語群＜ω = {A, B}, U = {イ, ロ, ハ}＞を考える。

	イ	ロ	ハ
A	○	○	×
B	×	○	○



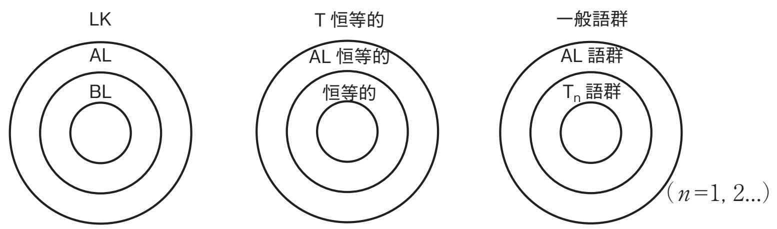
このとき、q[B/q]およびnon(p∧non(p∧q))[A/p, B/q] の付値は次のようになる。

$[q[B/q]] = \{B\}$, $[\mathrm{non}(p\wedge \mathrm{non}(p\wedge q))[A/p, B/q]] = [\mathrm{non}(A\wedge \mathrm{non}(A\wedge B))] = gh[A\wedge \mathrm{non}(A\wedge B)] = gh([A]\cap gh[A\wedge B]) = gh(\{A\}\cap gh([A]\cap[B])) = gh(\{A\}\cap gh(\phi)) = gh(\{A\}\cap\{A,B\}) = gh(\{A\}) = \phi$.

従って、$[(q \rightarrow \mathrm{non}(p\wedge \mathrm{non}(p\wedge q)))\ [A/p, B/q]] \neq \omega$.

すなわちALの健全性は成り立たない。(BLの健全性により、式 q → non(p∧non(p∧q))はBLで証明可能でない。)

では恒等的な式は必ずBLで証明可能であろうか。つまりBLの完全性が成り立つであろうか。課題として残されていると思える。



証明できる式の集合　　式の集合　　語群の集合

(4) 我々はBLとALのどちらもアポーハ論理と呼ぼうと思う。しかし、BLとALには次の違いがある。BLは一般語群で妥当する（或る語群において成立する上位語・下位語関係を前提としてBLによって導出される上位語・下位語関係は当該語群において成立する）のに対し、他方ALはAL語群では妥当するが、一般語群では必ずしも妥当しない。また、既に述べたように、任意の一般語群でAがBの下位語であるような論理式の対＜A,B＞は悉くALによって得られるが、反対に、ALで得られる式で恒等的でない（上位語・下位語関係を表さない）も

のがある。任意の一般語群でAがBの下位語であるような論理式の対<A,B>が悉くBLによって得られるか否かは不明である。我々はBLを狭義のアポーハ論理、そしてALを広義のアポーハ論理と呼んでおきたい。

5. ALと直観主義命題論理（LJ）

（1）ALの証明図では、否定右について直観主義命題論理（LJ）の規則が用いられる以外は古典命題論理（LK）の規則が用いられる。そしてLJの否定右規則はLKのそれの特殊な場合（上式の右辺がϕの場合）であるから、式 $\Gamma \to \Delta$ がALで証明可能ならば、その証明図は、これをLKの証明図と見なすことできる。従って、Gentzenの基本定理（cut除去定理）によって、式 $\Gamma \to \Delta$ を終式とするLKの証明図でcut（三段論法）を一度も用いないものが存在する（cf. 小野、p.40）。cutを用いないこのLKの証明図において、もし、否定右については常にLJの規則が用いられているならば、その場合の証明図はALの証明図でもあるから、ALについても基本定理が成り立つと言うことができる。

LKの基本定理の証明は、証明図に使われているcutの一つ一つに対して、証明図の変形を行うことを繰り返す（cf. 竹内・八杉、p.40ff.）。そのとき、この変形に際して、当初の証明図中の（LJの）否定右をLKの否定右に書き換えることが必要な変形は存在しない。例えば、次のようなcutを用いた証明図（の部分）があるとする（cut論理式がnonA）。

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \mathrm{non}A} \qquad \dfrac{\Pi \to \Lambda, A}{\mathrm{non}A, \Pi \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

これに基づいて変形が行われるが（ibid., p.44-45）、$\Delta = \phi$ の場合（従って否定右はLJのそれ）、変形中も変形後も$\Delta = \phi$のままである。またcut論理式の一番外の記号が$\wedge$あるいは$\vee$の場合についても変形において新たに否定右が必要とされることはない。こうして、ALについても基本定理が成り立つことが分かる。

これに対し、BLにおいてはcut除去定理は成り立たない。

例えば、Aを命題として、non（A$\vee$nonA）→　は次のようにcutを用いてBLで証明可能である（略図）。

$$\begin{array}{lll}
\underline{A \to A} & \underline{\mathrm{non}A \to \mathrm{non}A} & \\
\underline{A \to A, \mathrm{non}A} & \underline{\mathrm{non}A \to A, \mathrm{non}A} & \\
\underline{\underline{A \to A \vee \mathrm{non}A}} & \underline{\underline{\mathrm{non}A \to A \vee \mathrm{non}A}} & \underline{\mathrm{non}A \to \mathrm{non}A} \\
\multicolumn{2}{l}{\underline{\mathrm{non}(A \vee \mathrm{non}A) \to \mathrm{non}A \qquad \mathrm{non}(A \vee \mathrm{non}A) \to \mathrm{nonnon}A}} & \underline{\mathrm{nonnon}A, \mathrm{non}A \to} \\
\multicolumn{3}{c}{\underline{\mathrm{non}(A \vee \mathrm{non}A) \to \mathrm{non}A \wedge \mathrm{nonnon}A \qquad\qquad \mathrm{non}A \wedge \mathrm{nonnon}A \to}} \\
\multicolumn{3}{c}{\mathrm{non}(A \vee \mathrm{non}A) \to}
\end{array}$$

（対偶— 二重下線の部分—がBLで成立することについては注記を参照[12]。）

いま、この証明図がcutのないBLの証明図に書き換えることができたとする。すると、その証明図において、終式の上式は $\to A \vee \mathrm{non}A$ である。ところが、$\to A \vee \mathrm{non}A$ の語群上の付値は一般的には当該語群から得られるアポーハ代数の最大元にはならない（例えば前節（4.）の（3）における語群)。これはBLの健全性と矛盾する。よって、BLにおいてcut除去定理は成り立たない。

（2）次のことが成り立つ。

式 $\Gamma \to \Delta$ がALで証明可能であるとき（従って、式 $\Gamma \to \Delta^*$ がALで証明可能であるとき)、式 $\Gamma \to \Delta^*$ はLJで証明可能である。

証明

LJの式は、LKにおける式の右辺に現れる論理式の個数を高々１に制限した場合であるといえるから、ALにおける式 $\Gamma \to \Delta$ の証明図の始式はLJの式と見なせる。ALによる証明図（三段論法は使われていないとしてよい）で、式の右辺に“初めて”論理式が複数個（以下の証明図では簡単のため2個あるいは3個とする）現れた直後の推論を考える。

∧右の場合。ALにおける証明図は次のようになる（Γは論理式の列、A, B, Cは論理式)。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A, B} \qquad \dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A, C}}{\Gamma \to A, B \wedge C}$$

$\Gamma \to A$ はLJで証明可能であるから、次の証明図（略図）がLJで作れる（二重線は大幅な省略を表す)。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee C}}{\Gamma \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)}}{\Gamma \to A \vee (B \wedge C)}$$

(LJで $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. 証明は省略。)

non左の場合。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A, B, C}}{\mathrm{non}C, \Gamma \to A, B}$$

この場合は次の証明図をLJで作ることができる。

$$\dfrac{\Gamma \to A}{\underline{\mathrm{non}C, \Gamma \to A}}$$

$$\mathrm{nonC}, \Gamma \rightarrow A \vee B$$

∨右の場合。

$$\frac{\dfrac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A, B}}{\Gamma \rightarrow A \vee B}$$

この場合は次の証明図をLJで作ることができる。

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B}$$

これらを繰り返せば、式の右辺には高々１個の論理式しか現れない証明図、すなわちLJの証明図が得られる。

証明終わり

基本定理はLJでも成立する（小野、p.205;竹内・八杉、p.69）。そして、cutのない証明図について、次の定理がLJ（およびLK）に関して知られている（小野 p.206）。

定理：Pを式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ に到るcutなしの証明図とする。このとき、Pに現れるどの論理式も、式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ に現れるどれかの論理式の部分論理式になっている。

我々は含意記号の現れない論理式を考えているから、式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ がLJで証明可能なとき、それはALで証明可能である。一方、上で見たようにALで証明可能な式（終式の右辺をΔ^*にしておく）はLJで証明可能である。ゆえに、事実上、ALで証明可能な式とLJで証明可能な式の範囲は一致する。この意味で、ALは直観主義命題論理（LJ）から含意に関する規則を除いた体系（断片、部分体系）と同等であるということができる[13)]。

6. アポーハ論理とアポーハ代数

論理式P, Qについて、任意のAL語群で［P］=［Q］が成り立つならば、すなわち、$[P \rightarrow Q] \equiv_{AL} \omega$ かつ $[Q \rightarrow P] \equiv_{AL} \omega$ ならば、AL完全性により、$P \rightarrow Q$ および $Q \rightarrow P$ がALで証明可能である。反対に、$P \rightarrow Q$ および$Q \rightarrow P$ がALで証明可能ならばAL健全性により［P］=［Q］が任意のAL語群で成り立つ。任意のAL語群で［P］=［Q］が成り立つことを $[P] \equiv_{AL} [Q]$ で表わし、$P \rightarrow Q$ および $Q \rightarrow P$ がALで証明可能であることを$P \equiv_{AL} Q$(P, Qは同値）で表わせば、

$$[P] \equiv_{AL} [Q] \Leftrightarrow P \equiv_{AL} Q$$

が成り立つ。

さて、<u>AL恒等的</u>な式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ があるとする。AL完全性により、$\Gamma \rightarrow \Delta$ はALで証明図が書ける。いま、一つのAL語群$<\omega_i, U>$をとり、ω_iの要素（語）をX, Y, Z, …とする。Γ

→ Δ の証明図に現れる命題変項（p, q, r,…）にω_iの要素を代入する。これを（Γ → Δ）［X/p, Y/q, Z/r, …］などと表わす。例えば（Γ → Δ）［X/p, X/q, Z/r, …］はp, qがともにXで置き換えられ、またr等がZ等でそれぞれ置き換えられた証明図であることを意味する。要するに証明図におけるp,q,r等の命題変項はX, Y, Z等に置き換わる。これがX, Y, Z等を命題変項とする証明図であることは明らかである。AL健全性から証明図の終式 Γ → Δ の付値はω_iである。

AL語群＜ω_i, U＞から得られるアポーハ代数を$S_{AL}(\omega_i)$で表わす。$S_{AL}(\omega_i)$の任意の要素をαとする。αは、X, Y, Z等を命題変項として作られる何らかの命題Pの付値である。いまα＝[P] とする（[P]$\equiv_{AL}$[Q]⇔ P$\equiv_{AL}$Q であるから、αに対するPは同値の範囲で一意的に定まる）。同様に、β, γ, …∈S(ω_i) に対して、β＝[Q], γ＝[R], …とする。

（Γ → Δ）［P/p, Q/q, R/r, …］（すなわちΓ → Δの証明図における命題変項p, q, r, …をP, q, r, …で置き換えた図。その他、（Γ → Δ）［P/p, P/q, P/r, …］など様々な置き換えがある。）もまたALによる証明図であることは明らかである。 P, Q, R…をX, Y, Z…を命題変項とする論理式で表せば、（Γ → Δ）［P/p, Q/q, R/r, …］の終式はX, Y, Z, …を命題変項とする論理式から成るALで証明可能な式であるが、Γ → ΔはAL恒等的であるから、その付値＝ω_iである。これを、命題変項p, q, r, …に対するアポーハ代数S(ω_i) の要素α, β, γ,…の割り当てと呼び、（Γ → Δ）[α/p, β/q, γ/r, …]＝ω_iと書く。（Γ → Δ）[α/p, α/q, α/r, …]＝ω_iなど、様々な割り当てによる終式の付値が考えられるが、値はいずれもω_iである。

すなわち、AL恒等的な式 Γ → Δ は任意のアポーハ代数$S_{AL}(\omega_i)$（i ＝ 1, 2, …）における任意の割り当てによる付値がω_i（最大元）である。逆に、式 Γ → Δ が任意のアポーハ代数$S_{AL}(\omega_i)$（i ＝ 1, 2, …）における任意の割り当てによる付値がω_iであるならば、特に<u>α＝[X], β＝[Y], γ＝[Z], …の割り当て</u>を考えれば、Γ → Δ が<u>AL恒等的</u>であることは明らかである。つまり、式 Γ → Δ がAL恒等的であるとは、任意のアポーハ代数$S_{AL}(\omega_i)$（i ＝ 1, 2, …）における任意の割り当てによる付値がω_i（最大元）であることであると言える。アポーハ代数$S_{AL}(\omega_i)$における任意の割り当てによる付値がω_i（最大元）であることを再び恒真と呼べば、既に示した含意関係から次のように言える。

　ALで証明可能な式は任意の$S_{AL}(\omega)$で恒真であり、逆に任意の$S_{AL}(\omega)$で恒真な式はALで証明可能である。

また第5節（[5]）で示したことから、これは次のように言い換えることができる。

　直観主義命題論理（LJ）で証明可能な式（ただし含意記号を含まない）は任意のSAL(ω)で恒真であり、逆に任意のSAL(ω)で恒真な式はLJで証明可能である。

直観主義論理とハイティング代数14）について次のような関係が成り立つ（Cf.小野 p.239）。

　観主義論理（LJ）で証明可能な式は任意の（有限）ハイティング代数で恒真であり、逆に任意の（有限）ハイティング代数で恒真な式は直観主義論理で証明可能である。

つまり次の比論的等式が成立する。

直観主義論理：ハイティング代数＝AL：$S_{AL}(\omega)$

おわりに

語の意味（artha）は他の排除であるとするアポーハ論に対して、例えば「牛」を例に用いて次のような批判が考えられる。

「牛」にとっての他は「非牛」のarthaである。すると、

（1）「牛」のartha＝(「非牛」のartha）の排除。

同様に、「非牛」にとっての他は「非非牛」のarthaである。すると、

（2）「非牛」のartha＝(「非非牛」のartha）の排除。

従って、

（3）「牛」のartha ＝(「非非牛」のartha）の排除の排除。

ところが、非非牛＝牛であり、また“排除の排除”は何もしないことである。

従って、（3）は

（4）「牛」のartha＝「牛」のartha

に他ならない。

つまり、「語の意味（artha）は他の排除である」というのは同語反復に過ぎない。

この批判は、語Aにとっての他＝「非A」のarthaという前提の他に、次の前提の上に成り立っている。前提1 非非牛＝牛。前提2 “排除の排除”は何もしないこと。

しかし、いずれの前提もその意味は明らかとは言えない。とりわけ前提1の意味は判然としない。前提1が「非非牛」＝「牛」の意味でないことは、語として「非非牛」が「牛」とは別語であることから明らかである。また、前提1が「非非牛」のartha＝「牛」のarthaの意味であるならば、それを成り立たせる語とarthaと「非」の関連があらためて問われなければならないであろう。

アポーハ論への批判であれ擁護であれ様々な曖昧さを放置したままアポーハ論研究が進められることは望ましいことではないであろう。曖昧さを除くためにディグナーガのアポーハ論を一旦記号論理学的分析の下に置いてみることも必要であると思う。本稿の第一節の冒頭で述べたように、私は一定の条件を満たす語群を設定して、そこから作られるアポーハ代数を用いて、語Pの意味（artha）を、

$$\mathrm{artha}(P)=\mathrm{cov}((h[P])^{C})$$

と表した。そして、二つの語A, B について、

AはBの下位語である（BはAの上位語である）⇔ artha(A)⊇ artha(B)

と定義した。

すると、例えば「牛」について以下のことが成り立つ（語Pに対して、その否定名辞「非P」をしかるべく定義したとして）。

・あらゆる語群で「非非牛」は「牛」の上位語である。
・あらゆる語群で「非牛」と「牛」は上位語・下位語関係にない（その意味で排除関係にある）。
・「非非牛」の意味（artha）は必ずしも「牛」のarthaと一致しない。すなわち、artha（非非牛）≠ artha（牛）となる語群が存在する。

本稿の示したことは、要するにこのような「非」は直観主義命題論理（ただし含意記号は現れない範囲）における否定記号で表すことができるということである。

【参考文献】

上田昇・平林隆一 2012「アポーハ代数とそのグラフ理論的解釈」『目白大学経営学研究』10号 29-42.
上田昇　2015「論議領域とアポーハ代数—否定名辞の外延的意味—」『目白大学人文学研究』第11号 1-16.
上田昇　2016a「アポーハ論と名辞—否定名辞・複合語—」『印度學佛教學研究』64-2（111）-（118）.
上田昇　2016b「オイラー図とアポーハ代数」『目白大学人文学研究』第12号1-21.
小野寛晰　1994『情報科学における論理』日本評論社
竹内外史・八杉満利子　2010『証明論入門　復刊』共立出版

【注】

1）各記号の定義を記す（上田2016a 参照）。

・ωの要素（語）Xに対象全体Uの部分集合（外延）を対応させる関数M.

　M(X)：= Xの外延

・ωの任意の部分集合αを対象領域に写す関数h .

　h(α)：= αの各要素の外延の和集合。

　例えば、α = {A,B} のとき、h(α) = M(A)∪M(B).

・対象の集合s(Uの任意の部分集合）の被覆—外延がsと交わる語の集合—を表す関数cov.

　$\mathrm{cov}(s) := \{Z \in \omega \mid M(Z) \cap s \neq \phi\}$.

・対象の集合sについて、外延がsに含まれる語の集合（sのコア）を表す関数core.

　$\mathrm{core}(s) := \{Z \in \omega \mid h(\{Z\}) \subseteq s\}$.

・Uの部分集合をωの部分集合に写す次の関数g.

　g：$2^U \rightarrow 2^\omega$.（2^U, 2^ωはそれぞれUおよびωの冪集合。）

　$t \in 2^U$ に対して、$g(t) := \{X \in \omega \mid h(\{X\}) \cap t = \phi\}$.

　（この定義は、g(t) を、$h(\alpha) \cap t = \phi$ となる最大の$\alpha \subseteq \omega$ と定義することと同等である。）

・関数coreを用いて、付値［X］を次のように定義する。

　$X \in \omega$のとき、$[X] := \mathrm{core}(h(\{X\}) = \mathrm{core}(M(X))$.

・付値は論理式に拡大される。つまり、論理式X,Yについて付値［X］,［Y］が与えられているとき、$[X \wedge Y] = [X] \cap [Y]$, $[X \vee Y] = [X] \cup [Y]$, $[\mathrm{non}X] = g(h([X]))$ と帰納的（回帰的）に定義する。

論理式の付値全体は，所与の語群ωの冪集合2^{ω}の中に，演算∩，∪，ghについて閉じた集合（代数系）を作る．これをアポーハ代数と呼ぶ。なお、こうして得られるアポーハ代数の「同一性（同型性）」と、各語の外延的関係を表す「オイラー図」の「同一性」は論理的に等価である（上田2016b）。

2）この定義は、下位語の方がその上位語より「排除」（意味）が多いとするディグナーガの議論を基にしている。

3）語群を$<\omega,U>$とする。$\mathrm{artha}(A)=\mathrm{cov}((h[A])^c)=(\mathrm{core}(h[A]))^c$, $\mathrm{artha}(B)=\mathrm{cov}((h[B])^c)=(\mathrm{core}(h[B]))^c$ より、$\mathrm{artha}(A)\supseteq\mathrm{artha}(B)\Leftrightarrow(\mathrm{core}(h[B]))^c\supseteq(\mathrm{core}(h[B]))^c\Leftrightarrow\mathrm{core}(h[A])\subseteq\mathrm{core}(h[B])$. いま$\mathrm{core}(h[A])\subseteq\mathrm{core}(h[B])$とする。このとき、$h[A]\subseteq h[B]$でないと仮定する。すると、Uの或る要素uが存在して、$u\in h[A]$かつ$u\notin h[B]$. $u\in h[A]$より、ωの或る要素Zが存在して、$u\in M(Z)$かつ$Z\in\mathrm{core}(h[A])$. つまり、$u\in M(Z)\subseteq h[A]$. $u\notin h[B]$だから、$Z\notin\mathrm{core}(h[B])$. これは$\mathrm{core}(h[A])\subseteq\mathrm{core}(h[B])$と矛盾する。ゆえに$h[A]\subseteq h[B]$. 逆に、$h[A]\subseteq h[B]$のとき、$\mathrm{artha}(A)\supseteq\mathrm{artha}(B)$は明らか。

4）対偶を証明する。或る語群における或る語の（命題変項への）代入で$[A]\subseteq[B]$が成り立たないとする。つまり或る語群と、そこにおける語Zが存在して、$Z\in[A]$かつ$Z\notin[B]$であるとする。このときの語群を$<\omega,U>$とし、ω_1で表す。ω_1に対象u_0を追加した語群$<\omega,U\cup\{u_0\}>$をω_2で表す。ただし、ω_1における語$X\in\omega$について、$M(Z)\subseteq M(X)$のとき、そしてそのときにのみ、ω_2における語$X\in\omega$について、$u_0\in M(X)$とする。Uの要素については、ω_2における各語はその外延をω_1から引き継ぐものとする。

このとき、ω_2における任意の二語X, Yの外延上の関係（① 語X,Yの外延が一致する。② 語Xの外延が語Yの外延に含まれるが、一致はしない。③ 語Yの外延が語Xの外延に含まれるが、一致はしない。④ 語Xの外延と語Yの外延 が共通部分を有するが、一方が他方に含まれたり一致したりすることはない。⑤ 語Xの外延と語Yの外延が共通部分を有さない。）はω_1におけるそれと同一であることは明らかである。従って、ω_2から得られるアポーハ代数はω_1から得られるアポーハ代数と同一である。ゆえに、ω_2においても$Z\in[A]$かつ$Z\notin[B]$である。従って、$[B]=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$とするとき、$[B]=[X_1]\cup\ldots\cup[X_n]$だから、どの$X_i$についても$Z\notin[X_i]$. つまり、どの$X_i$についても$M(Z)\subseteq M(X_i)$は成り立たない。よって、$u_0\notin M(X_1)\cup\ldots\cup M(X_n)=h[B]$. 一方、$u_0\in M(Z)\subseteq h[A]$. ゆえに、$\omega_2$で$h[A]\subseteq h[B]$は成り立たない。なお、下線部分の証明は次の通り。$X_i\in[X_i]$だから$\{X_1,\ldots,X_n\}\subseteq[X_1]\cup\ldots\cup[X_n]$. また$X_i\in[B]$より$[X_i]\subseteq[B]$（アポーハ代数の要素を$\alpha$とするとき、$X\in\alpha$ならば$[X]\subseteq\alpha$である（上田2016b 補題1））。ゆえに$[B]=\{X_1,\ldots,X_n\}=[X_1]\cup\ldots\cup[X_n]$.

5）例えば否定左規則の場合は次のようである。$[\Gamma\rightarrow\Delta,P]=\omega$のとき$[\mathrm{nonP},\Gamma\rightarrow\Delta]=\omega$であることを示せばよい。$[\Gamma\rightarrow\Delta,P]=\omega$より、$[\Gamma]\subseteq[\Delta]\cup[P]$. 従って、$[\mathrm{nonP}]\cap[\Gamma]\subseteq[\mathrm{nonP}]\cap([\Delta]\cup[P])=([\mathrm{nonP}]\cap[\Delta])\cup([\mathrm{nonP}]\cap[P])=[\mathrm{nonP}]\cap[\Delta]\subseteq[\Delta]$. よって、$[\mathrm{nonP},\Gamma\rightarrow\Delta]=\omega$. また、cutについては、$[\Gamma\rightarrow\Delta,P]=\omega$かつ$[P,\Pi\rightarrow\Sigma]=\omega$から$[\Gamma,\Pi\rightarrow\Delta,\Sigma]=\omega$を言えばよい。実際、$[\Gamma]\cap[\Pi]\subseteq([\Delta]\cup[P])\cap[\Pi]=([\Delta]\cap[\Pi])\cup([P]\cap[\Pi])\subseteq([\Delta]\cap[\Pi])\cup[\Sigma]\subseteq[\Delta]\cup[\Sigma]$.

6）一つの語群$<\omega,U>$が与えられているとする。$[P\rightarrow\ ]=\omega\Leftrightarrow[P]^c=\omega\Leftrightarrow[P]=\phi\Rightarrow h[P]=\phi\Leftrightarrow gh[P]=\omega\Leftrightarrow[\mathrm{nonP}]=\omega\Leftrightarrow[\ \rightarrow\ \mathrm{nonP}]=\omega$. ゆえに、$[P\rightarrow\ ]=\omega\Rightarrow[\ \rightarrow\ \mathrm{nonP}]=\omega$. もし、どの語の外延も空でないという条件が満たされるならば、⇒ は⇔に置き換えることができる。

7）詳しくは拙論に譲るが、［0, 1］区間にカントール集合（３進集合）を構成するに際して取り除かれる可算無限個の開線分U_i($i=1,2,\ldots$）を悉く最低種と見なして種名構造を考える。すなわち、UniverseI はU_iの有限個の和集合を外延とする種名による階層的構造を持つ。ただし、Universe*I*における語の集合ωは無限集合であるため、いま考えている論理体系は、Universe*I* のωを有限集合に限定した語群に対して妥当するというべきであろう。

8）この証明は小野（p.210-226）で論じられる直観主義命題論理の（クリプキ・モデルによる）フレームに関する完全性の証明を語群の場面に読み替えたものである。この読替には次の二つの留意事項がある。1）含意記号⊃の読替は困難である。従って、含意記号を含む論理式を（拡大された）語

として認めない。2）ルール①のままでは否定記号の読替は困難であり、LJの否定右規則が必要であると思われる。

9）論理式Aの部分論理式は次のように定義される（cf. 小野1994, p.8）。1）A自身はAの部分論理式である。2）AがB∨C, B∧C, B⊃Cのいずれかの形をしているとき、Bの部分論理式およびCの部分論理式はすべてAの部分論理式でもある。3）AがnonBの形をしているとき、Bの部分論理式はすべてAの部分論理式でもある。（本稿ではB⊃Cの形の論理式は扱わない。）

10）関数coreによる付値の定義に際し、coreの意味を次のように変更することも考えられる。$X \in \omega$について、$[X] := \mathrm{core}(M(X)) = \{Z \in \omega \mid M(Z) \subseteq M(X) \wedge M(Z) \neq \phi\}$. このとき、$M(X) = \phi$ならば、明らかに $[X] = \phi$.

例として、$\Gamma = A_1, A_2$, $\Delta = B_1, B_2$ のときを示す。$A_1, A_2 \to A_1 \wedge A_2$ および $B_1 \vee B_2 \to B_1, B_2$ が（ALで）証明可能であるから、もし$A_1 \wedge A_2 \to B_1 \vee B_2$が証明可能であるなら、$A_1, A_2 \to B_1, B_2$ が証明可能であることになって、矛盾。

対偶の証明図

$$\dfrac{\dfrac{C \to D \qquad \dfrac{\mathrm{non}D \to \mathrm{non}D}{D \to \mathrm{nonnon}\,D}}{C \to \mathrm{nonnon}D}}{\mathrm{non}D \to \mathrm{non}\ C}$$

13）推論規則のうち含意右、否定右（及び普遍量化右）についてはLJと同じであり、それら以外はすべてLKと同じ形式的体系をLJ' とするとき、「LJ'で証明可能な論理式はLJでも証明可能であり、またその逆もなりたつ」（小野、p.245, 263）。我々のALはLJ' からさらに含意（および量化）に関する規則を除いた形式的体系ということができるであろう。

14）Hを、演算∩, ∪が定められている順序集合、すなわち束（lattice）とする。束Hの要素a,bに対し、a⊃b はa∩x≦b となるxの中で最大のものを意味するとする。Hの任意の要素a,bに対してa⊃b が存在するとき、束Hを相対擬補束（relatively pseudo-complemented lattice）という（小野、p.234）。そして、最小元0を持つ相対擬補束がハイティング代数と呼ばれる。nonaはa⊃0 として定義される。アポーハ代数は相対擬補束である。なぜなら、語群を所与とするとき、任意の二語（論理式）A, Bに対して、[A]∩[X]⊆[B] となる語（論理式）Xの中で（語群上の付値が）最大のものが存在するからである。なぜなら、$[A] \cap [X_i] \subseteq [B]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ のとき、X_iの論理和$X_1 \vee X_2 \vee \ldots$をZとすれば、$[A] \cap [Z] \subseteq [B]$かつ $[X_i] \subseteq [Z]$であるから、$[Z] = [A] \supset [B]$ となる。しかし、AL語群の場合には［nonA］（= gh［A］）は［A］⊃φ（すなわち［A］∩［X］⊆φとなる語（論理式）Xが与える最大の付値）と一致するが、一般の語群の場合は必ずしも一致しない。つまり、AL語群から得られるアポーハ代数はハイティング代数とみなすことができるが、アポーハ代数一般はハイティング代数ではない。

（平成29年11月29日受理）