目白大学　人文学研究
第12号　2016年　1－21

オイラー図とアポーハ代数

Euler's Diagram and Apoha Algebra

上田　昇
Noboru UEDA

Keywords：Euler's diagram, Apoha Algebra, extension
キーワード：オイラー図、アポーハ代数、外延

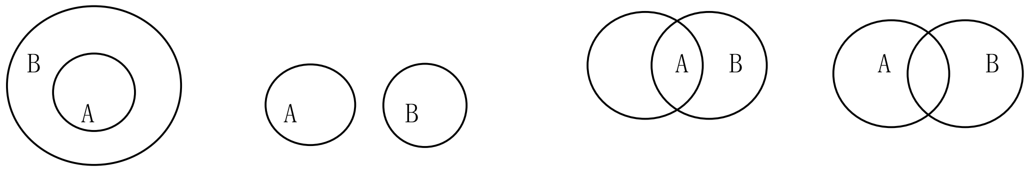
はじめに

古代インドの仏教僧ディグナーガ（5－6世紀）は、語の意味〈artha〉は「他の排除」に他ならないとするアポーハ論を説いた（アポーハ〈apoha〉とは「排除」を意味するサンスクリット語）。本稿で言う「アポーハ代数」とは、このディグナーガの「他の排除」論を定式化するために考案された一つの簡単な代数（いくつかの演算に関して閉じた集合）である。この代数を用いた「他の排除」（すなわち語の意味）の定式化そのものは、しかし、本稿の中心テーマではない[1)]。本稿のテーマは、「アポーハ代数」の「同一性（同型性）」がいわゆる「オイラー図」の「同一性」と論理的に等価であること、言い換えれば、「アポーハ代数」は「オイラー図」の代数的表現であること、その意味で「アポーハ代数」は「オイラー図」と等視できることの論証である。このことが「語の意味」について持つ意味合いに関しては本稿最終節で簡単に触れるが詳細は別稿を期したい。

［1］オイラー図

レオンハルト・オイラー（1707-1783）による「オイラー図」は三段論法を説明するものとして、『ドイツ王女への手紙』（*Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique & de Philosophie*）に登場するといわれ、次のように紹介されている[2)]。

All A is B.　　No A is B.　　Some A is B.　　Some A is not B

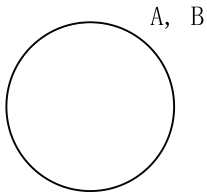


うえだのぼる：看護学部看護学科教授

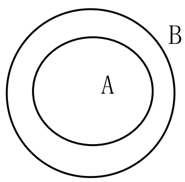
　これらの図は三段論法における４種類の前提命題（全称肯定、全称否定、特称肯定、特称否定）に対応するものである。しかし、三段論法解釈を離れて、単に二つの語（概念）の外延上の関係をどのように表示するかを考えるならば、Keynesが “the five following diagrams represent all possible relations between any two classes”（Keynes, p.127）として描く次の５種類の図― Keynesはこれらも「オイラー図（Euler's diagrams）」と呼ぶ― が考えられる。（以下の図はKeynesの図と一箇所異なるところがある。すなわち我々の⑤に相当する図でKeynesは二つの円が接するように描いている。）

　語の外延を円によって表示するとき、２語A, Bの外延$M(A)$．$M(B)$の関係は次の５種類に区別できる。ただし、$M(A) \neq \phi$，$M(B) \neq \phi$ とする。

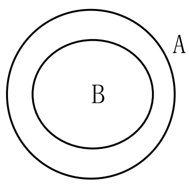
　①　語A, Bの外延が一致する。すなわち、$M(A) = M(B)$.



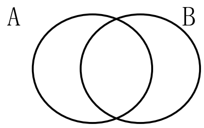
　②　語Ａの外延が語Ｂの外延に含まれるが、一致はしない。すなわち、$M(A) \subset M(B)$.（記号 $\subset$ は真部分集合であることを意味するものとする。）



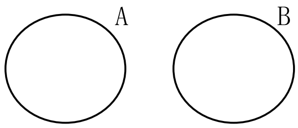
　③　語Ｂの外延が語Ａの外延に含まれるが、一致はしない。すなわち、$M(B) \subset M(A)$.



　④　語Ａの外延と語Ｂの外延 が共通部分を有するが、一方が他方に含まれたり一致したりすることはない。すなわち、$M(A) \cap M(B) \neq \phi$ かつ、「$M(A) \subseteq M(B)$」でもなく「$M(B) \subseteq M(A)$」でもない。



⑤　語Aの外延と語Bの外延が共通部分を有さない。すなわち、$M(A) \cap M(B) = \phi$.



本稿では①〜⑤の図を「狭義のオイラー図」と呼ぶことにする。

［2］オイラー図の「同一性」について

狭義のオイラー図は、任意の２語の外延的関係（［1］節の①〜⑤）を意味する。しかし、一般的には同一平面上に同時に描かれた３個以上の円（単純閉曲線）による図も「オイラー図」と呼ばれる。我々はこれらを「広義のオイラー図」と呼ぶことにする。本稿では単に「オイラー図」と言う場合は狭義のオイラー図（２語）あるいは広義のオイラー図（３語以上）、いずれも意味し得るものとする[3)]。

当節では、二つの（広義の）オイラー図が「同一」であるということの意味を検討する。

（１）いま、語Xの外延をM(X）で表す。名辞の集合（語群）{A,B,C,D}について、$M(C) = M(A) \cup M(B)$ であるか、$M(C) \supset M(A) \cup M(B)$ であるかによって（ここで⊃は⊇かつ≠を表す）、次の二通りの語群（各語の外延の状況）を考える。（論議領域は前者の場合{イ、ロ、ハ}、後者の場合{イ、ロ、ハ、ニ}とする。表における○は当該の対象が当該の語の外延の要素であることを表し、×はそうでないことを表す。）

$M(C) = M(A) \cup M(B)$の場合。

	イ	ロ	ハ
A	○	×	×
B	×	○	×
C	○	○	×
D	×	×	○

語群1

M(A）={イ}, M（B）={ロ}
M(C）={イ , ロ}, M（D）={ハ}

$M(C) \supset M(A) \cup M(B)$の場合。

	イ	ロ	ハ	ニ
A	○	×	×	×
B	×	○	×	×
C	○	○	×	○
D	×	×	○	×

語群2

M(A）={イ}, M（B）={ロ}
M(C）={イ , ロ , ニ}, M（D）={ハ}

語群１と２は同一の広義のオイラー図（図１）で表せる。言い換えれば、図１は、名辞Cの外延の要素ではあるが名辞Aの外延と名辞Bの外延のいずれにも含まれない対象が存在するかしないかについて曖昧である。

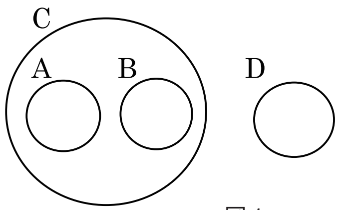


図１

（２）実数平面上に広義のオイラー図を描くとき、その図が我々を「錯覚」させる場合があることが知られている。すなわち、Hellyの定理[4)]（Helly's theorem）を実数平面とそこにおける円（有界閉凸集合）に適用すると、たとえば４個の円のどの３個も共通部分が空でないならば、それら４個の円に共通な点が存在するという結果が得られる。従って、４つの語の外延について、「４語すべての外延に共通な要素（対象）は存在しないが、いずれの３語の外延も共通要素を持つ」という場合、４語それぞれの外延を円で表し、それらを実数平面上に同時に描くとき、すなわち広義のオイラー図を描くとき、あたかも４語に共通する外延（要素）が存在するかのような図を描かざるを得ない。

例えば、４語をA, B, C, Dとして、語と対象の関係が次の語群表で表せるものとする。

	イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	チ
A	○	×	×	×	○	○	○	×
B	×	○	×	×	○	○	×	○
C	×	×	○	×	○	×	○	○
D	×	×	×	○	×	○	○	○

語群３

語の外延を円で描くとき、この語群３についての「オイラー図」は次のようになろう。

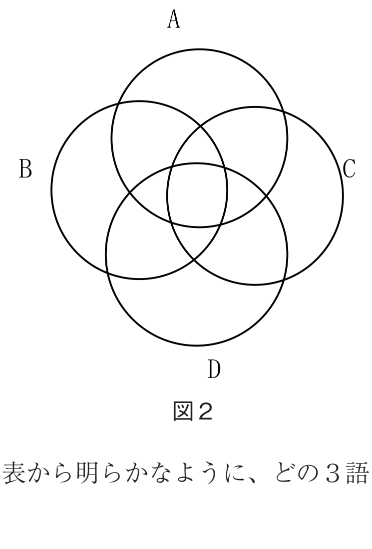
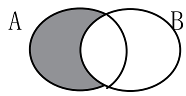


図２

語群表から明らかなように、どの３語も共通の対象を持つが、４語に共通する対象は存在し

ない。それにもかかわらず、この語群について、広義のオイラー図を描こうとすると、図２のようにあたかも４語に共通する対象が存在するかのように描かざるを得ない。

他方、Venn図においては、対象が存在しない領域は陰影（shading）で表示される。例えば全称肯定命題 “All A is B” は、



のように描かれる。(Sun-Joo., p.18)

従って、図２は、語群３のVenn図としては、中央の四重に重なった領域を陰影化（shading）する必要がある。

（３）Sun-Joo（1994）は、Venn図を用いて行われる推論（論理体系）が単項述語を持つ第一階の述語論理（a monadic first-order language, p.112）と等価であることを証明している。(Venn図とブール代数の同型性isomorphismを証明しているともいえる。Ibid., p.6）その際、Sun-JooはVenn図を描くときの規則の一つとして “partial-overlapping rule” を挙げるが、それは次のように定義される。(引用における“nonrectangle”の“rectangle”とは事実上、論議領域である。また “minimal region” とは、その内部にregion（線で囲まれた領域）を含まないregionのことである。)

> Partial-overlapping rule: A new closed curve introduced into a given diagram should overlap a *proper part of every existent nonrectangle* minimal region of that diagram once and *only* once. (Ibid., p.57)

例えば、次の図３は “partial-overlapping” ではないからVenn図としては認められない。

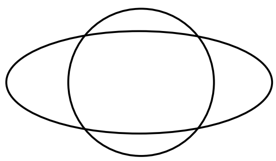


図３

また、我々のオイラー図は、互いに交わらない２円（[1]節における⑤）を認めるのであるから、一般には “partial-overlapping rule” は成り立たない。

ところで、Sun-Jooは“partial-overlapping rule”に関連して以下のごとく一つの定理に言及している。

We cannot draw more than three circles satisfying this partial-overlapping condition.

This is why a closed curve, rather than a circle, was introduced as a primitive object of this system. Venn himself presented a diagram with four closed curves to show that it is not impossible to draw “Eulerian circles”（differetiable, non-self-intersecting closed curves）to represent more the three terms. Some have thought that it is impossible to draw more than four closed curves overlapping this way without disconnecting closed curves. This has been pointed out as a crucial shortcoming of Venn diagrams. However, V.Polythress and H.Sun proved that we can draw any finite number of convex connected curves observing the partial-overlapping rule.（Ibid., p.60）（下線は引用者）

ここで言及されるV.Polythress and H.Sunの論文タイトルは“A Method to Construct Convex, Connected Venn Diagrams for Any Finite Number of Sets”であるが、事実上“partial-overlapping rule”が守られている。

いま、４語について下線部における４つの凸閉曲線によるVenn図―仮にVenn図Pと呼ぶ―が与えられているとする。そして、minimal regionそれぞれが一つの要素（対象）を持つとする。それは次の語群に対応する。

	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12	U13	U14	U15
A	○	×	×	×	○	○	○	×	×	×	○	○	○	×	○
B	×	○	×	×	○	×	×	○	○	×	○	○	×	○	○
C	×	×	○	×	×	○	×	○	×	○	○	×	○	○	○
D	×	×	×	○	×	×	○	×	○	○	×	○	○	○	○

語群４

ここで、U1～U4 は１語のみの対象（外延）、U5～U10 は２語の対象、U11～U14は３語の対象、U15は４語の対象になっている。また、対象の総数は15である（minimal regionの個数と一致する）。

いま、語群４における対象U15を削除した語群を考える。この語群について、先と同様に下線部におけるVenn図―仮にVenn図Qと呼ぶ―を描いたとする。このVenn図Qは４語の外延が重なるregionの陰影化以外は先のVenn図Pと変わらないはずである。なぜなら、語群４からU15を削除した語群において、いずれの３語の外延も共通要素（対象）を持つから（A, B, Cに共通 = U11, A, B, Dに共通 = U12, A, C, Dに共通 = U13, B, C, Dに共通 = U14）、Hellyの定理により、４つの凸閉曲線に共通な点が存在しなければならないからである。この共通な点（の一つ）をU15と見なせば、このVenn図Qは陰影化以外はVenn図Pに他ならない。

つまり、（２）で述べたような「錯覚」は、V.Polythress and H.Sunの定理に基づいて作ら

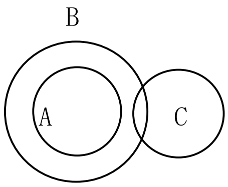
れたVenn図（“partial-overlapping rule”が守られている）においても消えないのである。（ただし、対象U15を削除しても、それを含むminimal regionの陰影化は行わない。従って、Venn図Pはそのままオイラー図と見なせる。）

オイラー図を円などの凸閉曲線に限定して「描く」とき、オイラー図の「同一性」をどのように考えればよいであろうか。上に述べた「錯覚」のことを考慮すれば、オイラー図の「同一性」はこれを視覚的な（トポロジカルな）同一性とは別のところに求めるべきであろう。

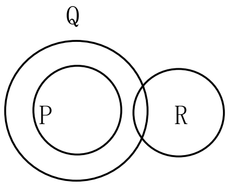
（４）同一性の定義

語群ω_1とω_2のオイラー図が「同じ」であるとは、ω_1からω_2への全単射の写像（一対一対応）f が存在して、任意の要素$X,Y \in \omega_1$について、XとYの外延上の関係（[1］節の①〜⑤）がω_2におけるf(X）とf（Y）の外延上の関係と同一であることと定義する。

例えば、語群ω_1のオイラー図が



であり、一方、語群ω_2のオイラー図が



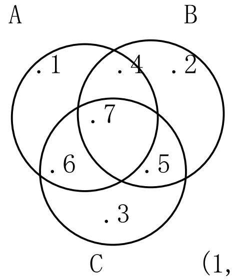
であるとする。このとき、f(A)= P, f(B)= Q, f(C)= Rとなる全単射の写像$f: \omega_1 \rightarrow \omega_2$によって$\omega_1$のどの２語も$\omega_2$において、$\omega_1$におけるのと同一の外延的関係を持つ２語に写るから、これら２つのオイラー図は「同一」である。特に$\omega_2 = \omega_1$の場合、fは語（語の符号、音声）の置換である。狭義のオイラー図は、同心円状のとき、語Ａの外延が語Ｂの円の内側か外側かによって区別されたが（[1]節の②および③)、ここに定義したオイラー図の同一性によってオイラー図を分類するとき、この区別は消える。

二つのオイラー図が「同一」である条件は何か。我々の結論は、語群はそれから得られるアポーハ代数が「同じ（同型)」なら、そしてその場合のみ、「同一」のオイラー図を持つというものである。（アポーハ代数については次節参照。）

（５）上で定義したオイラー図の「同一性」からは次のような「錯覚」が生じる。まず、３語７対象の語群を次のように設定する。

	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7
A	○	×	×	○	×	○	○
B	×	○	×	○	○	×	○
C	×	×	○	×	○	○	○

この語群に対するオイラー図は次のようになる。（対象を点で表示する。）



（1, 2 等はそれぞれ U1，U2 等を表す）

図４

一方、この語群から対象U3, U4を取り除いた語群を考える。

	U1	U2	U5	U6	U7
A	○	×	×	○	○
B	×	○	○	×	○
C	×	×	○	○	○

この語群のオイラー図は次のように描けよう。

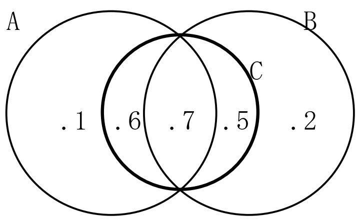


図５

しかし、図４と図５は「同じ」オイラー図である。なぜなら、どの２語の外延的関係（[1]節の④が３組）も両図において「同じ」だからである。実際、図4におけるA, B, C をそれぞれ図５におけるA, B, Cに対応させる写像をf（恒等写像）とすれば、明らかに f は２円の外延

的関係を変えない全単射の写像である（A・B, A・C, B・Cのいずれも両図において［1]節の④の関係)。

図５の円Cは円Aと円Bの外部には領域（region）を有さない点で、図５は図４と視覚的に(トポロジカルにと言うべきか)「異なる」であろう。しかし、我々の定義に従えば、図４と図５は「同じ」オイラー図である。

このように、広義のオイラー図の直観的（視覚的）イメージと、我々の定義するオイラー図の「同一性」の間にはズレがあることに留意する必要がある。すなわち、本稿におけるオイラー図の「同一性」は、複数個の狭義のオイラー図を同時に同一平面上に表そうとしている広義のオイラー図の直観的（視覚的）イメージの「同一性」と同義ではない。

［3］アポーハ代数

語群（語の全体をω、対象の全体をUで表す）に関連していくつかの関数を定義する。

1）$X \in \omega$　について、その外延を$M(X)$で表す。

2）ωの任意の部分集合αを対象領域に写す関数h.

$h(\alpha) := \alpha$の各要素の外延の和集合

例えば、$\alpha = \{A,B\}$ のとき、$h(\alpha) = M(A) \cup M(B)$.

3）対象の集合sについて、外延がsに含まれる語の集合（sのコア）を表す関数core.

$\mathrm{core}(s) := \{Z \in \omega \mid h(\{Z\}) \subseteq s\}$

4）対象の集合sについて、外延がsと交わらない語の集合を表す関数g.

$g(s) := \{X \in \omega \mid h(\{X\}) \cap s = \phi\}$.

（なお、この定義は、g(s) を$h(\Gamma) \cap s = \phi$ となる最大の$\Gamma \subseteq \omega$ と定義することと同等である。）

以上の関数を用いて、語Xの付値[X]を次のように定義する。

(*) $X \in \omega$のとき、$[X] := \mathrm{core}(h(\{X\}) = \mathrm{core}(M(X))$

例えば、図６の場合、$[A] = \{A, D\}$, $[B] = \{B, E\}$, $[C] = \{C, E\}$, $[D] = \{D\}$, $[E] = \{E\}$となる。

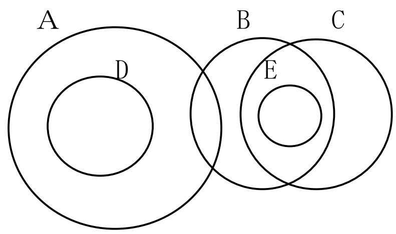


図６

$X \in \omega$のとき、$h([X]) = h(\{X\}) = M(X)$ であるから、$h([X])$ は語Xの外延である。

ωの要素について定義した付値を論理式―命題論理の論理式は一般に命題変項、連言（∧)、選言（∨)、否定（non)、含意（→）によって順に（帰納的に）構成されるが、我々は含意記号の現れない論理式のみを考えることにする―に拡大する。先ず、命題変項（従って論理式）と

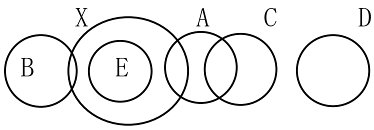
見なされた$X \in \omega$については、(*)によりXの付値を与えるものとする。そして、論理式（拡大された語）の付値を次のようにして順に（帰納的に）定める。$[X \wedge Y]=[X] \cap [Y]$, $[X \vee Y]=[X] \cup [Y]$, $[\mathrm{non}X]=g(h([X]))$.

こうしてできる論理式の付値全体は、所与の語群ωの冪集合2^{ω}の中に、演算$\cap, \cup$,ghについて閉じた集合（代数系）を作る。これをアポーハ代数と名づける[5)]。

なお、関数g, hの定義より、否定名辞nonXの「外延」は、その外延がXの外延と共通部分を持たないところの語の外延の和集合となる。図６の場合、例えば、$M(\mathrm{non}A) = h[\mathrm{non}A] = h\{C,E\} = M(C) \cup M(E) = M(C)$.

［4］オイラー図とアポーハ代数

語群ωが与えられたとき、$X \in \omega$について、Xの付値[X]は、外延が語Xの外延に含まれる語の集合$\{Z \in \omega \mid h(\{Z\}) \subseteq h(\{X\})\}$である（［3］節の(*)）。また否定名辞nonXの付値[nonX]は語Xと外延上共通部分を持たない語の集合$\{Z \in \omega \mid h(\{Z\}) \cap h(\{X\}) = \phi\}$である。従って、語Xと外延の一部分のみを共有する語（［1］節④の関係にある語）が、そしてそれらのみが、[X]にも[nonX]にも現れない。たとえば、次のオイラー図で、A,BはいずれもXとは外延の一部のみを共有するだけであるから、$[X] \cup [\mathrm{non}X]$の要素ではない。（付値に関して我々の「否定」nonは排中律を満たさない[6)]。）



$\omega=\{X,A,B,C,D,E\}$, $[X]=\{X,E\}$, $[\mathrm{non}X]=\{C,D\}$, $([X] \cup [\mathrm{non}X])^{C} = \{A,B\}$　（肩付のCは補集合を表す。）

一般的に、語群の要素Xについて、[X]と[nonX]がそれぞれ定まれば、外延の一部分のみをXと共有する語も定まる。

［2］節（4）における「同一性」の定義により、一般に二つの語群ω_1とω_2が「同じ」オイラー図で描かれることはアポーハ代数における付値を用いて次のように表せることは明らかである。

一方の語群ω_1から他方の語群ω_2への全単射の写像fが存在して、任意の要素$X \in \omega_1$について次の条件が成り立つ。

$[X]=\{x,y,z, \ldots\}$ かつ $[\mathrm{non}X]=gh[X]=\{u,v,w,\ldots\}$ $(x,y,z,\ldots u,v,w,\ldots \in \omega_1)$ のとき、

$[f(X)]=\{f(x), f(y), f(z), \ldots\}$ かつ $[\mathrm{non}f(X)]=gh[f(X)]=\{f(u), f(v), f(w), \ldots\}$

$(f(x), f(y), f(z), \ldots f(u), f(v), f(w), \ldots \in \omega_2)$.

以下では、語群ωにおける語の外延は各々の語について異なるものとする、つまり［1］節のオイラー図①の関係にある２語はωには存在しないものとする。

さて、語群はそれから得られるアポーハ代数が「同じ（同型）」とき、そしてそのときに限って、「同じ」オイラー図を持つ。言い換えれば、アポーハ代数はオイラー図の代数的表現であると言うことができる。具体的には次の二つの定理が成り立つ。

【定理１】二つの語群ω_1とω_2が「同じ」オイラー図で描かれるならば、それぞれのアポーハ代数$S(\omega_1)$と$S(\omega_2)$は同型である。ここで同型の定義は次の通り。
$S(\omega_1)$から$S(\omega_2)$への全単射の写像Fが存在して、任意のα，$\beta \in S(\omega_1)$について、
$F(\alpha \cup \beta) = F(\alpha) \cup F(\beta)$，$F(\alpha \cap \beta) = F(\alpha) \cap F(\beta)$，$F(gh(\alpha)) = ghF(\alpha)$.

【定理２】アポーハ代数$S(\omega_1)$と$S(\omega_2)$が同型ならば、ω_1とω_2のオイラー図は「同じ」である。このとき、$S(\omega_1)$から$S(\omega_2)$への同型写像Fおよび、ω_1からω_2への全単射の写像fが存在して、任意の$X \in \omega_1$について$F[X]=[f(X)]$.

定理１の証明。
二つの語群ω_1とω_2が「同じ」オイラー図で描かれるとする。すると、先に述べたような、ω_1から他方の語群ω_2への全単射の写像fが存在する。そこで、$F: S(\omega_1) \rightarrow S(\omega_2)$ を次のように作る。

$\alpha = \{x,y,z,\ldots\} \in S(\omega_1)$（$x,y,z,\ldots \in \omega_1$）について、$F(\alpha) = \{f(x), f(y), f(z), \ldots\}$.

すると、明らかにFは単射、すなわちα，$\beta \in S(\omega_1)$について、$\alpha \neq \beta$ならば$F(\alpha) \neq F(\beta)$である。従って、$F(\alpha \cap \beta) = F(\alpha) \cap F(\beta)$が成り立つ。また、$F(\alpha \cup \beta) = F(\alpha) \cup F(\beta)$は明らか。
$F(gh(\alpha)) = ghF(\alpha)$ は次のようにして示すことができる。

$$
\begin{aligned}
F(gh(\alpha)) &= F(gh\{x,y,z,\ldots\}) \\
&= F(gh(\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\} \cup \ldots)) \\
&= F(gh\{x\} \cap gh\{y\} \cap gh\{z\} \cap \ldots) \quad (gh(\alpha \cup \beta) = gh(\alpha) \cap gh(\beta),\ \text{cf.上田・平林2012}) \\
&= F(gh[x] \cap gh[y] \cap gh[z] \cap \ldots) \quad (h\{x\}=h[x],\ h\{y\}=h[y],\ \ldots) \\
&= F[nonx] \cap F[nony] \cap F[nonz] \cap \ldots \quad (\text{Fは単射})
\end{aligned}
$$

一方、

$$
\begin{aligned}
ghF(\alpha) &= gh(\{f(x), f(y), f(z), \ldots\}) \\
&= gh(\{f(x)\} \cup \{f(y)\} \cup \{f(z)\} \cup \ldots) \\
&= gh\{f(x)\} \cap gh\{f(y)\} \cap gh\{f(z)\} \cap \ldots \\
&= gh[f(x)] \cap gh[f(y)] \cap gh[f(z)] \cap \ldots \\
&= [nonf(x)] \cap [nonf(y)] \cap [nonf(z)] \cap \ldots
\end{aligned}
$$

f, Fの定義から、[nonx]={u,v,w,...}のとき、F[nonx]=F{u,v,w,⋯}={f(u), f(v), f(w),...}=[nonf(X)].ゆえにF[nonx]=[nonf(x)].

同様に、F[nony]=[nonf(y)], F[nonz]=[nonf(z)],...。ゆえに、F(gh(α))= ghF(α).

なお、Fがωのベキ集合2^{ω}における順序を保つ(α⊆β ならばF(α)⊆F(β) である)ことは明らかであるから、S(ω_1) とS(ω_2) は順序同型である。

定理1証明終わり。

次に、<u>定理1の逆（定理2）</u>を証明するが、あらかじめ次のことを確認しておく。

補題1

X∈ω, α∈S(ω) について、X∈α ならば、[X]⊆α.

証明

α =[Z] (Z∈ω) のとき。付値の定義より、X∈[Z] ならば[X]⊆[Z].

α =[Z]∪[Y] (Y, Z∈ω) のとき。X∈[Z]∪[Y] より、X∈[Z] または X∈[Y]. 従って、[X]⊆[Z] または [X]⊆[Y]. ゆえに、[X]⊆[Z]∪[Y].

α =[Z]∩[Y] (Y, Z∈ω) のとき。X∈[Z]∩[Y] より、X∈[Z] かつ X∈[Y]. 従って、[X]⊆[Z] かつ [X]⊆[Y]. ゆえに、[X]⊆[Z]∩[Y].

α =[nonZ]=gh[Z]のとき（Zはωの要素とは限らない論理式）。X∈gh[Z] ならばh{X}∩h[Z]= φ より、h[X]∩h[Z]= φ . ゆえに、[X]⊆gh[Z].

α =[P]とするとき（ただしP∈ωとは限らない)、Pに含まれる論理記号の個数についての数学的帰納法により、X∈α∈S(ω) ならば、[X]⊆α.

証明終わり

補題2

F : S(ω_1) → S(ω_2) が同型写像であるとする。このとき、全単射の写像 f : ω_1→ω_2 が存在して、任意のX∈ω_1についてF[X]=[f(X)]となる。

証明

ω_1の語Xについて、F[X]={P, Q, R, ...} (P, Q, R, ...∈ω_2) とする。

P, Q, R, ...∈{P, Q, R, ...}∈S(ω_2) だから、補題1より、[P]⊆{P, Q, R, ...}, [Q]⊆{P, Q, R, ...}, ...。 従って、[P]∪[Q]∪[R]∪... ⊆{P, Q, R, ...}. 一方、{P, Q, R, ...}⊆[P]∪[Q]∪[R]∪... は明らか。ゆえに、{P, Q, R, ...}=[P]∪[Q]∪[R]∪... すなわち、F[X]= [P]∪[Q]∪[R]∪... 従って、X∈[X]= F^{-1}([P]∪[Q]∪[R]∪...)= F^{-1}[P]∪F^{-1}[Q]∪F^{-1}[R]∪...

ここで、X∈F^{-1}[P] としても一般性は失われない。すると、補題1により[X]⊆F^{-1}[P]. 従って、F[X]⊆[P]. 一方、F[X]⊇[P] は明らか。ゆえに、F[X]=[P].

このように、ω_1の各要素Xについて、F[X]=[P] (P∈ω_2) となるPが存在する。そこで、写像f : ω_1 → ω_2をf(X)=P と定義する。こうして、Fから定まる写像 f : ω_1 → ω_2によっ

て、F[X]=[f(X)]となる。

fが全単射（一対一対応）であることは次のようにして言える。

f(X)=f(Y)=P のとき、F[X]=F[Y]=[P]（X,Y∈ω_1, P∈ω_2）である。[X]=[Y]よりh[X]=h[Y].（h[X]は語Xの外延。）また、h{X}=h[X], h{Y}=h[Y]だから、h{X}=h{Y}.同一の外延を有する２語は存在しないとあらかじめ前提しているから、X=Y.つまり、f:$\omega_1 \rightarrow \omega_2$は単射。

f が全射であることのの証明。

ω_1={X1,X2, …}, ω_2 ={P1,P2, …} とする。

いま、fが全射でないと仮定する。

fによるω_1の像をω_3とする。仮定により $\omega_3 \subset \omega_2$ （ω_3 はω_2の真部分集合）であるから、ω_2の要素であるがω_3の要素ではない語Qが存在する。

ここで、Q∈[Q]に注意する。

一方、αをS(ω_3)の任意の要素とするとき、Q∈αではないから、

1）[Q]はS(ω_3)の要素ではない。

[Q]∈S(ω_2）であり、F: S(ω_1)→S(ω_2）は同型写像だから、Xi∈ω_1(i=1,2,…）を命題変項とする論理式Aが存在して、F[A]=[Q] となるが、f(Xi)∈ω_3だから、F[A]∈S(ω_3). ゆえに、

2）[Q]∈S(ω_3).

1）と2）は矛盾する。

ゆえに、仮定（波線部）は否定される。

よって、fは全射である。

証明終わり

よって、f：$\omega_1 \rightarrow \omega_2$は全単射（一対一対応）である。

補題２証明終わり。

定理２　アポーハ代数S(ω_1）とS(ω_2）が同型ならば、ω_1とω_2のオイラー図は「同じ」である。このとき、S(ω_1）からS(ω_2）への同型写像Fおよび、ω_1からω_2への全単射の写像fが存在して、任意のX∈ω_1 についてF[X]=[f(X)].

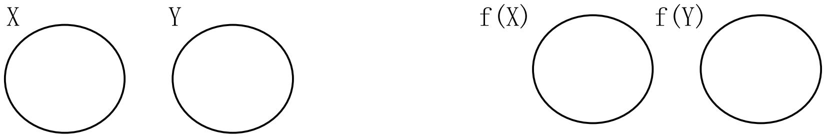
証明

背理法による。アポーハ代数S(ω_1）とS(ω_2）が同型であるにも拘わらず、任意の全単射の写像f：$\omega_1 \rightarrow \omega_2$ について、或るX,Y∈ω_1が存在して、「XとYの外延上の関係」≠「f(X)とf(Y)の外延上の関係」と仮定する（つまり、オイラー図が異なると仮定する)。

X,Y∈ω_1およびf(X), f(Y)∈ω_2 の外延は次のいずれかの関係である。

a)

b)



c)

X, Yがa）の場合。

fとして、補題２におけるfをとる。すると、任意の$X\in\omega_1$について、F[X]=[f(X)]となる。

[X]⊂[Y]であり、Fは順序を保存するから、F[X]⊂F[Y]. 従って h{f(X)}⊆h{f(Y)}. ゆえに、f(X)とf(Y）の外延上の関係がb）あるいはc）であることは矛盾する。

X, Yがb）の場合。

X∈[nonY], Y∈[nonX].

fとして、補題２におけるfをとる。すると、任意の$X\in\omega_1$について、F[X]=[f(X)]となる。

f(X), f(Y)がa）の状況になることは、同型写像F^{-1}によってa）がb）に変わることであるから、上のa）の場合に見たように、あり得ない。

f(X), f(Y)がc）の状況であるとする。

¬(f(X)∈[nonf(Y)]), ¬(f(Y)∈[nonf(X)]).

X∈[nonY] より、[X]⊆[nonY]. よって、[f(X)]=F[X]⊆F[nonY]=Fgh[Y]=ghF[Y]=gh[f(Y)]=[nonf(Y)]. よって、[f(X)]⊆[nonf(Y)]. f(X)∈[f(X)]だから、f(X)∈[nonf(Y)]. これは、¬(f(X)∈[nonf(Y)]) と矛盾する。

X, Yがc）の場合。

$f:\omega_1\to\omega_2$および$F:(\omega_1)\to S(\omega_2)$について、c）がb）に変化するとすれば、同時に、全単射の写像f^{-1}: $\omega_2\to\omega_1$および同型写像$F^{-1}:S(\omega_2)\to S(\omega_1)$について、b）がc）に変化する。しかし、これは上の b）の場合に見たように、矛盾を引き起こす。

同様に、c）がa）に変化することも矛盾。

定理の後半は補題２に他ならない。

証明終わり。

これらの定理１，２によって、オイラー図の「同一性」は、その図を与える語群（各語の外延の状況）から得られるアポーハ代数の同型性（順序同型）と論理的に等価であるといえる。そして、アポーハ代数$S(\omega_1)$と$S(\omega_2)$が同型であることは、語群ω_1とω_2のオイラー図が事実上それぞれの円（単純閉曲線）のラベルを貼り替えたものに過ぎない、言い換えれば、語の名称を取り替えたものに過ぎないことを意味している。

［5］語の「深さ」（depth）

語の「深さ」（depth）を以下のように定義する。

語Xのdepth:= h[X]（語Xの外延）から始まる、ωの他の要素（語）の外延との包含関係を順序とする下降列の長さの最大値。

たとえば、[X]={X}の場合（すなわち$\{U\in\omega \mid h\{U\}\subseteq h\{X\}\}=\{X\}$の場合）、最長の下降列は$h[X]\supset\phi$であるから、Xのdepth=1 である。また、[X]={X,Y,Z, …}の場合、（すなわち$\{U\in\omega \mid h\{U\}\subseteq h\{X\}\}=\{X,Y,Z, \ldots\}$の場合）、Yのdepth, Zのdepth, …の中で最大値をnとするとき、Xのdepth=n+1 である。（同一の外延を有する二語は存在しないと前提しているのでh[X]=h[Y]やh[X]=h[Z]といった事態は生じない）。

このような最大値が存在するとき当該の語の深さは「有限」、存在しないとき「無限」と呼ぶ。

定理３

$F : S(\omega_1) \to S(\omega_2)$が同型写像であるとする。Fから導かれる全単射の写像によって、ω_1における有限の深さ（depth）の語の付値は同じ深さの（ω_2の）語の付値に写される。

証明

ω_1の語Xのdepth=n とする。（nは自然数）

depthの定義により、$[X]\supset[X_{n-1}]\supset\ldots\supset[X_1]\supset\phi$（depth$X_i$=i）となる$X_i\in\omega_1$が存在する（i=1,2,...,n-1）。（n=1のときは、この列は$[X]\supset\phi$となる。）

定理２に関する補題２により、ω_1の要素からω_2の要素への全単射の写像fが存在して、任意の$Z\in\omega_1$についてF[Z]=[f(Z)]となる。すなわち、$S(\omega_2)$における順序列、$F[X]\supset F[X_{n-1}]\supset\ldots\supset F[X_1]\supset\phi$は、$[f(X)]\supset[f(X_{n-1})]\supset\ldots\supset[f(X_1)]\supset\phi$となる。ここで、$f(X), f(X_{n-1}), \ldots, f(X_1)\in\omega_2$. いま、たとえば$h[f(X)]=h[f(X_{n-1})]$と仮定すると、$h\{f(X)\}=h\{f(X_{n-1})\}$となってしまい、（$\omega_2$には）同一の外延を有する２語は存在しないという前提と矛盾する。従って、$h[f(X)]\supset h[f(X_{n-1})]$である。同様にして、$h[f(X)]\supset h[f(X_{n-1})]\supset\ldots\supset h[f(X_1)]\supset\phi$. ゆえに、f(X)のdepth$\geqq$n.

f(X)のdepth>n と仮定する。すると、$h[f(X)]\supset h[Y_n]\supset h[Y_{n-1}]\supset\ldots\supset h[Y_1]\supset\phi$なる下降列、従って、$[f(X)]\supset[Y_n]\supset[Y_{n-1}]\supset\ldots\supset[Y_1]\supset\phi$なる下降列が存在する（ここで、$Y_n, Y_{n-1},\ldots, Y_1\in\omega_2$）。すると、$F^{-1}[f(X)]\supset F^{-1}[Y_n]\supset F^{-1}[Y_{n-1}]\supset\ldots\supset F^{-1}[Y_1]\supset\phi$となる。よって、$[f^{-1}f(X)]\supset[f^{-1}(Y_n)]\supset[f^{-1}(Y_{n-1})]\supset\ldots\supset[f^{-1}(Y_1)]\supset\phi$. $f^{-1}(Y_i)=X_i$(i= 1,2,⋯,n）と置くと、$S(\omega_1)$における下

降列$[X]\supset[X_n]\supset[X_{n-1}]\supset\dots\supset[X_1]\supset\phi$が存在することになる。いま、たとえば$h[X]=h[X_n]$と仮定すると、$h\{X\}=h\{X_n\}$となってしまい、（$\omega_1$には）同一の外延を有する２語は存在しないという前提と矛盾する。従って、$h[X]\supset h[X_n]$である。同様にして、$h[X]\supset h[X_n]\supset\dots\supset h[X_1]\supset\phi$. ゆえに、Xのdepth $>$ n.これはXのdepth＝nに反する。ゆえに、f(X)のdepth≦n. f(X)のdepth≧n であったから、f(X)のdepth=n.

証明終わり

［6］オイラー図の分類について（課題）

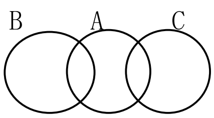
“partial-overlapping rule”（［2］節（３）参照）の下に作られたオイラー図（shadingなしのVenn図）があるとして、そのminimal regionにそれぞれ１個の対象を配置する。（n語の場合、minimal regionの総数は2^n-1だから、対象の総数も2^n-1である。）これに対応する語群表（n語, 2^n-1対象）を作る。すると、この語群表から一つのアポーハ代数が得られる。次に、この語群表から１個の対象（一列）を取り除いた新たな語群からアポーハ代数を作る（どの対象を取り除くかは2^n-1通りある）。同様に２個の対象を取り除いたときのアポーハ代数（どの２個かは、2^n-1個から２個を選ぶ組み合わせの数だけある）を作る。このようにして、対象（列）を適宜削除して語群表を作り、そこからアポーハ代数を作る。（実質的に語数がn-1 になってしまうような対象の削除は禁止する。）このとき、アポーハ代数は（同型の場合を一つと数えて）いくつあるであろうか。言い換えれば、n語の場合、（広義の）オイラー図は何種類あるか。

次の値が得られる。

- n＝１のとき、１（オイラー図としては無意味であるが。）
- n＝２のとき、３（同心円、一部分のみ重なる二円、離れた二円）
- n＝３のとき、11

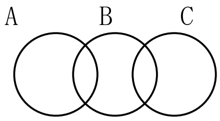
アポーハ代数は語群の各要素Xとその否定名辞nonXの付値、すなわち[X]および[nonX]から（∪, ∩, ghの演算により）生成される。そして、アポーハ代数間の同型写像によって、生成元は生成元に写る。従って、３語{A, B, C}からなる語群が与えられたとき、そこから得られるアポーハ代数において、語の名称A, B, Cを適宜入れ替えれば、[A], [B], [C], [nonA], [nonB], [nonC] が以下に記すNo. 1 ～ No.11のいずれか一つと一致する。

例えば、



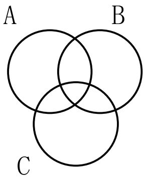
で表される語群のアポーハ代数において、A → B, B → A, C → C

なる入れ替えを同時に行えば、



で表される語群のアポーハ代数（生成元は下図のNo.２）が得られる。

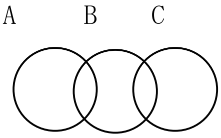
No.1



[A]={A}, [B]={B}, [C]={C},

[nonA]=φ, [nonB]=φ, [nonC]=φ.

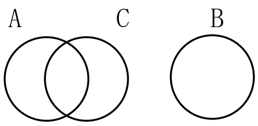
No.2



[A]={A}, [B]={B}, [C]={C},

[nonA]=C, [nonB]=φ, [nonC]=A.

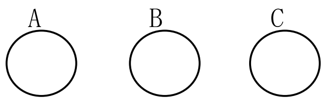
No.3



[A]={A}, [B]={B}, [C]={C},

[nonA]=B, [nonB]={A, C}, [nonC]=B.

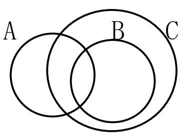
No.4



[A]={A}, [B]={B}, [C]={C},

[nonA]={B, C}, [nonB]={C, A}, [nonC]={A, B}.

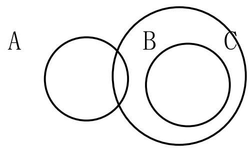
No.5



[A]={A}, [B]={B}, [C]={C, B},

[nonA]=φ, [nonB]=φ, [nonC]=φ.

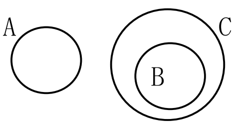
No.6



[A]={A}, [B]={B}, [C]={C, B},

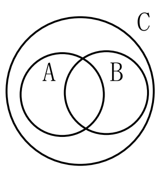
[nonA]={B}, [nonB]={A}, [nonC]=φ.

No.7



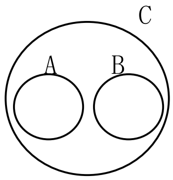
[A]={A}, [B]={B}, [C]={C, B},

No.8



[A]={A}, [B]={B}, [C]={C, A, B},

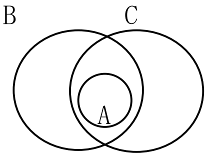
No. 9



[A]={A}, [B]={B}, [C]={C, A, B},

[nonA]={B}, [nonB]={A}, [nonC]= ϕ.

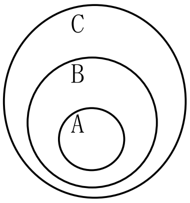
No. 10



[A]={A}, [B]={B, A}, [C]={C, A},

[nonA]= ϕ, [nonB]= ϕ, [nonC]= ϕ.

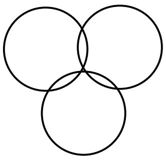
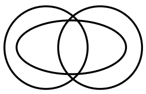
No. 11



[A]={A}, [B]={B, A}, [C]={C, A, B},

[nonA]= ϕ, [nonB]= ϕ, [nonC]= ϕ.

n ＝ 3 の場合の補足説明。

(1)　No. 1 は  や  と「同じ」オイラー図である。

（[1]節における④が３組）

（2）No. 8, 10はともに、同心円（②あるいは③）が２組、④が１組という点では同じであるが、アポーハ代数は同型にはならない。なぜなら、「深さ（depth)」が１の語がNo.8においては２個存在するのに対し、No.10においては1個だからである。（[5] 節の定理３により、アポーハ代数が同型ならば、両方の語群において、同じ深さの語数は一致しなければならない。）

- n ＝ 4 のとき、63（暫定値）
- n ＝ 5 のとき、518（暫定値）

nが与えられたとき、オイラー図の種類数を与える一般式はどのようであろうか。

［7］語の意味について

本稿の冒頭で述べた、「語の意味＝他の排除」を我々はアポーハ代数を用いて次のように定式化する。論理式Pを（拡大された）語と見て[7]、その意味artha(P) を、［3］節の関数core等を用いて、$artha(P)=(core(h[P]))^C$ と定義する（肩付のCは補集合を表す）。いま、対象の集合s（対象領域全体Uの任意の部分集合）の少なくとも一つの要素を外延に含む語の集合（sの「被覆、covering」）を表す関数covを考える。すなわち、$cov(s)=\{Z\in\omega \mid M(Z)\cap s\neq\phi\}$. すると、$\underline{cov(s^C)=(core(s))^C}$が成り立つことが容易に分かる。従って、$artha(P)=(core(h[P]))^C=cov((h[P])^C)$　が成り立つ。これは事実上、Pの外延h[P]の補集合 $(h[P])^C$ をPの排除対象（語Pを適用できない対象の集合）と見て、その「被覆」をPの意味<artha>と定めるものである（詳細は上田2016参照）。

自然言語の分析に際して数理論理学的手法を用いることはそれなりに有効であると思われるが、しかしまた、その論理学の「限界」といったものにも注意を払わなければならないであろう。例えば、語の外延の時間的変動をどのように扱えばよいのだろうか。自然言語への数理論理学的アプローチに批判的なG.レイコフは言う。「ついでながら、概念の中には、あらゆる参照点で、すなわちあらゆる時点、あらゆる可能な状況で、外延が同じものがある。数学上の概念はそういった中の最も明白な例であるとされる。例えば、「素数」の外延は時間や状況によっては変化しないと仮定されている」(Lakoff, 和訳p.220)。

外延の変動性の問題は夙にJ.S.MIllが普通名詞の意味に関する問題点として指摘している。すなわち、“The objects which compose any given class are perpetually fluctuating.”（Mill, p.94）とMillは述べている。「素数」の外延は変動しないであろうが、「牛」の外延は変動する。もし、語の意味を直ちに外延とするならば、語の意味は外延の変動とともに目まぐるしく変化しなければならないはずである。しかし、我々は日常、「牛」の意味がそれほど変動するとは考えない。Millは三段論法の推論に関連して、意味の変動を避けるため、結局、内包を普通名詞の意味とするのであるが、すると今度は語の意味は時間的に変化しないことになる。

我々は語の「意味」を、外延の変動の影響を直接に受けない比較的安定している存在として、しかしまた変化可能なものとして構想できないであろうか。語群を設定して、語の意味をその語群において捉え、語の意味（正確には語の意味の同一性の尺度と言うべきであるが）を上に述べたような「被覆」を以て表すならば、この要求はある程度満たされると考えられる。この定義によれば、語の意味は、語の外延のみによって定まるのではなく、当該の語群に於ける他の諸語の外延の有り様の影響を受けて定まるのであるが、この場合、意味の変化は当該の語群から作られるアポーハ代数の変化に伴って起こる変化であると言える。そして、アポーハ代数の変化は、オイラー図の変化と並行的であるということが本稿の示したことである。オイラー図において語の外延を円（単純閉曲線）によって表すとき、それぞれの円に含まれる対象の個数は問題にならない（対象の個数がゼロのとき円は描かれない）。問題になるのは他の円との包含関係である。そして、オイラー図が変化するのは、諸語の外延の関係が変化するとき

であり、それは「アポーハ代数」の変化となって現れるのである。既存の語群への新語の導入や、既存語の外延の消滅などがこの変化をもたらすと考えられる。ここに我々は語の意味についてソシュール的な言語価値論の見方を容れることになると思われる。

［謝辞］

第４，５節を草するにあたり、平林隆一経営学部教授より御助言を頂いた。記して感謝申し上げる。

【参考文献】

Keynes, J.N. *Studies and exercises in formal logic*, third ed. 1894（first edition 1884）.
Lakoff, G. *Women, Fire, and Dangerous Things*, The University of Chicago Press, 1987.
（和訳：池上嘉彦・河上誓昨他訳『認知意味論』紀伊國屋書店1993.）
Mill, J.S. 1843. *A system of Logic Ratiocinative and Inductive*. 8th ed.1872（1st ed. 1843）.
Collected Works of J.S.Mill, vol.Ⅶ, Univ. of Tronto Press,1974.
Polythress, V., and H. Sun. A Method to Construct Convex Connected Venn Diagrams for Any Finite Numbers of Sets. *Pentagon*. 31（Spring 1972）, pp:80-3.（ http://pentagon.kappamuepsilon.org/pentagon/Vol_31_Num_2_Spring_1972.pdf）
Shi, Sun-Joo 1994. *The Logical Status of Diagrams. Cambridge University Press.*
上田昇・平林隆一 2012「アポーハ代数とそのグラフ理論的解釈」『目白大学経営学研究』第10号
上田昇 2015「論議領域とアポーハ代数―否定名辞の外延的意味」『目白大学人文学研究』第11号
上田昇 2016「アポーハ論と名辞---否定名辞・複合語」『印度学仏教学研究』第64巻（予定）
高橋浩樹 2010『オイラー　無限解析の源流』現代数学社

【注】

１）「他の排除」としての「語の意味」に関する「アポーハ代数」を用いた定式化については上田（2016）を予定している。
２）Sun-Joo Shin（1994, p.12）. 同じ図がStanford Encyclopedia of Philosophy（http://plato.stanford.edu/entries/digrams/）にある。ただし、“All A is B” 等の代わりに“All A are B”, “No A is B”, “Some A is in B”, “Some A is not inB” とある。なお、『ドイツ王女への手紙』はフリードリッヒ大王の親類の或る王女のために書かれた手紙がもとになったとされる一般向けの科学・哲学の啓蒙書であり、第１巻～第３巻が1768年から数年間に亘ってフランス語、ロシア語、ドイツ語などで出版された（高橋浩樹 2010参照）。
３）本稿における「オイラー図」には論議領域全体を表す円や長方形は描かれないが、論議領域全体は確定しているものとする。論議領域の表示の問題については上田（2015）参照。
４）濃度 $n+1$以上の集合Λを添字集合とする、R^nの有界閉凸集合の族$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$に対して、どの$n+1$個の$X_\lambda$の共通部分も空でないなら、すべての$X_\lambda$に共通な点が存在する（『岩波 数学辞典第４版』）。本稿の語群3のケースでは、$n=2$, $\Lambda=\{1, 2, 3, 4\}$, $X_1=A$, $X_2=B$, $X_3=C$, $X_4=D$ となる。
５）上田・平林（2012）ではアポーハ代数における付値の定義が本稿におけるそれとは表面上やや異なっているが、本質的には異ならない。

6）アポーハ代数における排中律や二重否定については上田・平林（2012）を参照。

7）ここで論理式とは所与の語群ωにおける要素（語）を命題変項として作られる論理式である。[3]節参照。

（平成27年11月２日受理）