

論議領域とアポーハ代数

—否定名辞の外延的意味—

Universe of Discourse and Apoha Algebra

—Extensional Meaning of a Negative Term—

上田 昇
Noboru UEDA

Keywords : Indian logic, Cantor set, apoha

キーワード：インド論理学、カントール集合、アポーハ

はじめに

インド論理学（および仏教論理学）は「否定」をさまざまに論じるが、代表的な否定論のひとつに定立的否定（paryudāsa）と非定立的否定（prasajya-paratiṣedha）の区別がある。たとえば、否定名辞「非バラモン」（a-brāhmaṇa）の意味は否定辞（a-）の解釈に依存し、これを定立的否定と解釈すればクシャトリヤやヴァイシャといったヴァルナ（カースト）であり、他方非定立的否定と解釈すれば単にバラモンに非ずというだけであるとされる¹⁾。このうち、定立的否定の場合、「非バラモン」が牛や馬を意味することは通常の文脈では考えられない。「非バラモン」はあくまでバラモン以外のヴァルナを意味する。つまり、ここには西洋の伝統的論理学でいうところの論議領域（universe of discourse）が暗黙のうちに設定されており、いまの場合は（四種の）ヴァルナの領域が論議領域であると考えられる。（「非バラモン」が牛や馬を意味する可能性を認めなくてはならない文脈も想定はできるであろう。）

ところで、その西洋の伝統的論理学は、20世紀に入って、集合論（カントール）と記号論理学の登場・発展によって、論理学史の「博物館」に入った感がある。現代のインド論理学研究者も、しばしば集合論や記号論理学の方法を採り入れる。例えば、否定名辞の外延的意味について一般的に行われている解釈は、元の名辞の外延の補集合というものであるが（上の例で言えば、「非バラモン」の外延は「バラモン」の外延の補集合とされる）、これは述語論理学における否定解釈の発想に倣っていることを意味するであろう。このとき、いわゆるオイラー図やヴェン図を用いて否定名辞の外延が元の名辞の外延を表す円（単純閉曲線）の外側の領域として表示されたりもするが、それに伴って全体集合が長方形などで描かれる。しかし、これも

集合論を前提としているからであって、そもそもオイラー図は伝統的論理学の三段論法を説明するための図として考案されたものであり、全体集合は描かれていなかった²⁾。

Prior (1962) によれば、論議領域 (全体) を表す円をオイラー図に追加することは、否定名辞を含む三段論法解釈に関連して Keynes (1894) が行い、さらに Johnson (1921年の著作³⁾) が円を四角に代えたという。論議領域を表す図の導入は、Boethius (5-6世紀) による否定名辞を含む三段論法解釈の不十分さを補うためであった (Prior, *ibid.*)。

インド論理学—アリストテレス自身の三段論法と異なり、否定名辞が頻出する—においても、また西洋の伝統的論理学においても (自覚的な) 補集合概念は存在しなかったのであるから、補集合による否定名辞の意味解釈が必然的であるか否かは検討の余地があるであろう。我々はひとまず集合論成立以前に立ち返って否定名辞の外延の意味を考えてみたい。本論は de Morgan (1860) と Keynes (1894) に拠って、「集合論以前」の否定名辞論を検討した上で、否定名辞の外延について補集合に拠らない別の解釈が可能であることを示し、その解釈の特徴を論じる。

1 論議領域 (Universe of Discourse)

Keynes は論議領域 (universe of discourse) について次のように述べている。

It will be remembered that we are at present working on the assumption that each class represented by a simple term exists in the universe of discourse, while at the same time it does not exhaust that universe; in other words, we assume that S, not-S, P, not-P, all represent existing classes. Keynes (1894, p.106. 下線は引用者)

ここで S と P は “simple term” であるが、— complex term は conjunctive combination (SP) と disjunctive combination (S or P) の二種類ある (*ibid.*, p.56) — not-S および not-P は simple term と complex term のいずれでもないようである。ともあれ、S, not-S, P, not-P が表すクラス (class) は全て存在するとされる⁴⁾。

さらに Keynes は X と not-X が排中律 (Excluded Middle) を満たすと述べて、X と not-X の二語は全体を尽くすと言う (A pair of terms ... exhaust the entire universe to which reference is made, ... Everything is X or not-X. *Ibid.*, p.49)。

従って、集合論の言葉を使うならば、non-X の表す対象領域は X の表す外延 (集合) の「補集合」ということになるであろう。しかしここで問題が生ずる。Keynes は、肯定名辞は何らかの確定した属性の存在を含意する (a positive name implies the presence of certain definite attributes) のに対し、否定名辞は何らかの確定した属性の不在を含意する (a negative name implies the absence of one or other of certain definite attributes)、と言う。そして、否定名辞 (negative name) について、その指示作用が間接的であることを述べる中で次のように言う。

A strictly negative name has its denotation determined indirectly. It denotes an indefinite and unknown class outside a definite and limited class. In other words, we first mark off the class denoted by the positive name, and then the negative name denotes what is left. The fact that its denotation is thus determined is the distinctive characteristic of the negative name. (Ibid., p.51 下線は引用者)

下線部のようにKeynesは、否定名辞の表す対象領域を（元の）肯定名辞が表す対象領域の「残り（what is left）」としながらも、それは「不確定な未知のクラス（an indefinite and unknown class）」とするのである。

De Morgan（1860）は名辞（term）の使用を objective な使用と subjective な使用とに分け、さらに前者を対象（object）を表示する名辞（name）、および性質（quality）を表示する名辞（name）に分け、後者をクラス（class）を表示する名辞、および属性（attribute）を表示する名辞に分けている（*Syllabus*, p.37-38）。このうち、クラス（class）は a collection of individual objects, named after a quality which is in thought as being in each one とされ、一方、属性（attribute）は the notion of quality as it exists in the mind to be given to a class とされる。そして、属性と個体的性質の関係は、クラスと個体的対象の関係と同じである（Attribute is to individual quality what class is to individual object）と述べている（*ibid.*, p.38）。

否定名辞について de Morgan は論議領域（universe）との関連において次のように言う。

The whole extent of matter of thought under consideration I call the *universe*...Every term which is used divides the *universe* into two classes; one within the term, the other without. These I call contraries; and I denote the contrary class of X, the class not-X, by x. (p.39)

つまり、どの名辞 X も universe を二分し、その名辞 X の表示するクラスの外側に否定名辞 not-X が一つのクラスを形成するのである。続けて de Morgan は述べる。

When the universe is unlimited contrary names are of little effective use; not-man, a class containing every thing except man, whether seen or thought, is almost useless. It is otherwise in a limited universe, in which contraries, by separate definiteness of meaning, cease to be mere negations each of the other, and even acquire separate and positive names. (p.39)

このように、de Morgan は、universe が限定されていない（unlimited）なら、man を除くあら

ゆるものを含むnot-manなるクラスはほとんど無意味であるとする一方で、universeが限定される (limited) なら、否定名辞は単なる否定ではなくなり肯定名辞にすら転ずる、と言う。

De Morganの最後の主張は、たとえば「無理数」に良く当てはまる。Universe を実数全体とすると、有理数の属性 (quality, attribute) は整数の比で表せるということであるが、一方その属性を持たない対象が「有理数ではない」実数であり、転じて「無理数」である。

一般的に否定名辞は、しかし、universeを限定したとしても、その外延は不確定なところがある。それは、外延の決定要因としての内包 (属性: quality, attribute) が確定し難い場合、殊にそうである⁵⁾。そこで、もし外延を決定する内包的条件が確定できるならば、否定名辞が表示する外延 (クラス) はより明瞭なものになるであろう。De Morganは語と対象の関係を次のようにも論じている。

名前 (name) は対象 (object) に付せられた単なる印 (mark) である (a name is a mere mark, attached to an object, p.10)。そして、例えば 'Every man is an animal' は次のように取り扱われる。'Every object which has the name m-a-n has also the name a-n-i-m-a-l.' (Ibid.) そして、名前Xを持たない対象 (object) を名前xで印づける (ここでxは事実上not-Xの省略形である) (Let every object which has not the name X (*of which there are always some*) be conceived as therefore marked with the name x, meaning not-X, and called the contrary⁶⁾ of X. p.12-13)。すると、対象はXかxのいずれか一方である (every thing is either X or x; nothing is both, p.13)。こうして、x すなわちnot-Xを名前に持つ対象全体は、Xを名前に持つ対象全体の事実上の補集合として定まる。このように、名前Xを持たない対象を名前not-Xで印づけるとき、「名前Xを持たない」ことが、この対象が名前not-Xを持つための唯一の内包的条件になる (これを「内包」と呼べるかは問題だが)。

以上のように、Keynesおよびde Morganは否定名辞の外延 (クラス) を事実上 (元の) 名辞の外延の補集合と捉えているのであるが、それは集合論が生まれる以前のことであり、彼らに「補集合」という概念を要求することはできない。Keynesの場合、否定名辞の外延がどのようにして確定するかはさほど明瞭でない。また、de Morganは実質的には、名辞の外延の決定要因から「内包」の関与を避けようとしているように見える。

ここで、集合概念を使用して、名辞とその否定名辞、およびそれらの外延について本論に於ける用語上の取り決めを述べておきたい。

まず、名辞Pについて、それを名前に持つ対象の集合をPの外延と呼んでM(P) で表す。すると、Pを名前として持たない対象の集合は (全体集合は所与として) M(P) の補集合である。M(P) の補集合をM(P)^cで表す。De MorganおよびKeynesは「Pを名前として持たない」ものをただちに「not-Pなる名前を持つ」ものと見た、言い換えれば、M(P)^cの要素はnot-Pなる名前を持つとしたが、「Pを名前として持たない」ことと「not-Pなる名前を持つ」ことは別の事態であると考えられるから⁷⁾、M(P)^cの要素を無名と見ることもできるであろう。この場合、

Pの否定名辞not-Pは集合 $M(P)^c$ の名前と考えることができる。否定名辞not-Pの意味作用（指示機能）はM(P)の補集合 $M(P)^c$ に及ぶが、その要素には及ばないとするのである。

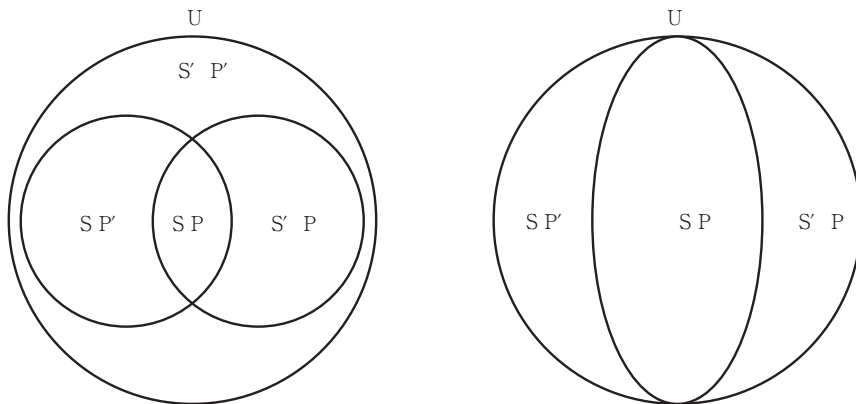


not-Pは集合を意味し、その集合の要素の名前ではない、ということはこのことはKeynesがオイラー図に導入したuniverse（論議領域）の名前Uの場合と似ている。なぜなら、もしUがKeynesの言う名辞（simple term）としてuniverseの要素を名指すなら（Uがclassなら）、Keynesの要請する前提から、not-Uによって名指される対象が存在しなければならないが、Uの意味からそのような対象は存在し得ない。従って、名辞Uはuniverse（集合）の名前ではあるが、その要素の名前ではない（de Morganはuniverseにおける対象を悉く名指す名前は「不要である」としている⁸⁾）。以下で我々は $M(\text{not-P})$ を $M(P)$ の補集合 $M(P)^c$ の意味で使用するが、このときnot-Pは $M(P)^c$ における対象を名指さないものとする。

2 Lambert's diagramsとコントロール集合

本節は伝統的論理学における論議領域すなわちuniverse（of discourse）のモデルをKeynesの考えを採り入れながら提示する。

先に引用したように、Keynesは“we assume that S, not-S, P, not-P, all represent existing classes”と述べていた。この前提の下で外延の状況をKeynesは7種類に分けて図示しているが、その中から二つをあげれば次のような図である（Keynes, p.142）。



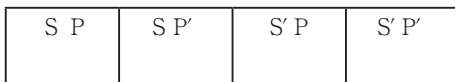
（S'はnot-Sを、P'はnot-Pを意味する。S P等はS and P等を表す。なおuniverse全体を表すUは肯定名辞のみの場合の図に準じて補足した。）

右の図は「not-Sかつnot-P」なる対象が存在しない状況を示している。Keynesはこのよう

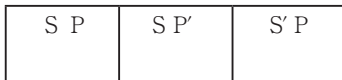
なオイラー図（7種類）のいずれかが、universeを構成する任意の名辞のペアについて描けるとするのである。

一般にオイラー図の円（単純閉曲線の内部）は語の外延を表す（universeにおけるすべての対象を表す語はde Morganの言うとおりに必要であろう）。この表示法の特徴は有限の大きさの二次元の連結領域によって語の外延が表象されるという点にあると思われる。

Keynes はuniverseを長方形で表し、それを幾つかの小さな長方形に分割する図による表示法も提示している。すなわち、

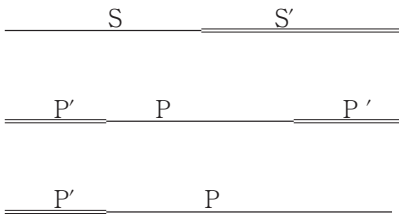


や



などである。（p.142, n.1）

一方でKeynesはLambert's diagrams として線分による表示法を紹介している（Keynes, p.145）。例えば、



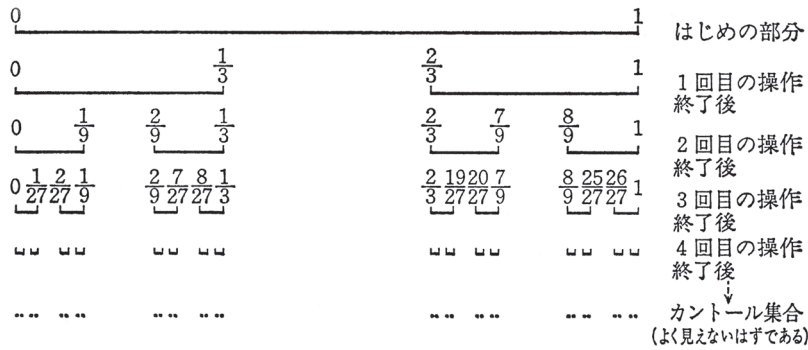
なる図は、一段目の線分がSとnot-Sの外延の状況を表し、二段目と三段目がPとnot-Pの状況を表している。すると、一段目と二段目を組み合わせれば、先に描いた左のオイラー図と外延の関係は同じ状況になり、一段目と三段目を組み合わせれば、右のオイラー図と同じになる。

Lambert's diagramsの特徴は名辞の外延を線分⁹⁾として表示する点にあるが、否定名辞の外延は必ずしも一つの連結領域である必要はないようである。

さて、アリストテレス以来の「伝統的論理学」において、universe（論議領域）における対象は動物、植物、鉱物といった身近な事物が典型的であったと考えられる。従って、以下に設定するような「点集合」に基づく種・類構造を持つuniverseは伝統的論理学的とは言い難い。むしろ集合論を前提とした上で、そこに種・類といった伝統的論理学の概念を持ち込むものである。

我々はまず、実数上の閉区間 $[0, 1]$ をとる。ここで、カントール集合（3進集合）を考える。松本（1985）によるカントール集合の説明は次のようである。

ひとつの線分、たとえば、数直線上の単位区間 $I = [0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ をとる。その線分を3等分して、真中の開線分を取り去る。単位区間 I の場合なら、 $1/3 < x < 2/3$ に相当する部分を取り去るのである。すると、2つの線分 $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ が残る。残った2線分の各々を3等分して、真中の開線分を取り去る。今度は、4つの線分 $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$ が残る。以下同様に、残った線分の各々をそれぞれ3等分して、真中の開線分をとり除く。この操作を無限回実行しても、なお、数え切れない程たくさんの点（非可算無限個の点）が残る。このようにして残った図形がカントール集合とよばれる‘図形’である。



(松本p.10-11)

明らかにカントール集合は区間 I における任意の開区間 (P_1, P_2) （ここで $P_1 < P_2$ ）を含まない¹⁰⁾。

いま I_0 によって上のカントール集合を表す。単位区間 I からカントール集合を取り除いた集合 $I - I_0$ は可算無限個の開線分から成るから、集合 $I - I_0$ を形成する各々の開線分に名前を付け、 U_1, U_2, U_3, \dots とできる。開線分 U_i について次のことが成り立つ。

- ・ $I - I_0 = M(U_1) \cup M(U_2) \cup M(U_3) \cup \dots$ ($M(U_i)$ は開線分そのもの—実数の部分集合—を表す)
- ・ $i \neq j$ のとき、 $M(U_i) \cap M(U_j) = \emptyset$

ここで、 $I (= [0, 1])$ 上に論議領域 (universe) のモデルを作る。いま、 U_i ($i=1, 2, 3, \dots$) を悉く最低種と見なす。「最低種」とは、それ自身より下位の—すなわち外延がより小さい—一種 (class) を持たない種のことである¹¹⁾。そして、種名 P についてその外延 $M(P)$ は開線分 U_i の有限個の和集合で表示されるものとする。すなわち、一般的に種の外延は、 $\{M(U_i)\}$ ($i=1, 2,$

3, ...) から適宜有限個の要素をとってきて、それらの和集合であるとする。 $M(P) \subseteq M(Q)$ のとき、 Q は P の上位種 (P は Q の下位種) と呼ぶ。例えば、 $M(P) = M(U_1) \cup M(U_2) \cup M(U_3)$, $M(Q) = M(U_1) \cup M(U_4)$ のとき、 $M(P) \cap M(Q) = M(U_1)$ であるから、 P, Q はいずれも U_1 の上位種である。

種名 P について、例えば、 $M(P) = M(U_1) \cup M(U_2) \cup M(U_3)$ のとき、universe は単位区間 I だから、 $M(\text{not-}P) = M(P)^c = I - M(U_1) \cup M(U_2) \cup M(U_3)$ となる。(このとき否定名辞 $\text{not-}P$ が種名でないことは、universe が無限個の最低種を含むことから明らか。“ $\text{not-}P$ ” は $M(P)$ の補集合 $M(P)^c$ の名前にすぎない。)

Keynes が universe を “最低種” の外延から成ると考えたかどうかは分からない。また、伝統的論理学において最低種を個体とする立場もあったと言われる¹²⁾。しかし、上のように、 I 上で開線分 U_i によって最低種を表し、それらの有限個の和集合によって種ないし類を構想することは、すべての名辞 (種名) と否定名辞が外延を持つという Keynes の要請を満たすものであり、伝統的論理学における論議領域 (universe) の一つのモデルとして許されるであろう¹³⁾。

ところで、明らかに $I_0 \subset I - M(P) = M(P)^c = M(\text{not-}P)$ である。しかし、 I_0 (コントロール集合) の定義 (作り方) から、 I_0 に種名の外延—開線分 U_i の要素—は含まれない。つまり、 $M(\text{not-}P)$ には一切の種名を持たない対象 (無名の対象) が紛れ込んでいることになる¹⁴⁾。 $M(\text{not-}P)$ から無名の対象を取り除く一つの方法は universe をあらかじめ $I - I_0$ と設定しておくことであるが、我々は、そもそも否定名辞の外延を元の名辞 P の外延の補集合 $M(P)^c$ とするという否定解釈のありかたを変えることによって、この問題に対処しようと思う。

3 アポーハ代数

否定名辞の外延を「補集合」に拠らずに求めるため、ここで「アポーハ代数¹⁵⁾」を取り上げる。

アポーハ代数の定義。

語群 ω と対象の集合 U が与えられているとする。また、各々の対象について各語の適用の可否が決まっているとする。(De Morgan 的に表現するならば、各対象が各名前を持つか否か決まっているとする。) この時、語群 ω の任意の語 X についてその「外延」および「排除対象」を次のように定義する。

語 X の外延 $M(X) :=$ 語 X が適用できる対象全ての集合

語 X の排除対象 $D(X) :=$ 語 X が適用できない対象全ての集合

ここで、 $M(X) \cup D(X) = U$ が成り立つものとする。また、定義から、明らかに $M(X) \cap D(X) = \phi$ である。なお、対象の集合 U 、言い換えれば universe の名前は語群 ω には含まれないものとする。(これは、universe の名前をすべての対象が共通に持つ事態を de Morgan が避けようとしたことに対応する。Cf. 注8)

次に関数 h と g を定義する。

関数 $h: \omega$ のベキ集合 2^ω (ω の部分集合の集合) $\rightarrow U$ のベキ集合 2^U .

$$\alpha \in 2^\omega \text{ に対して、} h(\alpha) := \alpha \text{ の各要素の外延の和集合} \\ = \cup M(X) \text{ (ここで } X \in \alpha \text{).}$$

関数 $g: 2^U \rightarrow 2^\omega$.

$$t \in 2^U \text{ に対して、} g(t) := \{X \in \omega \mid h(\{X\}) \cap t = \phi\}.$$

この定義は、 $g(t)$ は $h(\Gamma) \cap t = \phi$ となる最大の $\Gamma \subseteq \omega$ である、と定義することと同等である。

アポーハ代数を定義する。

語群 ω のベキ集合 2^ω の中に次のように集合 $S(\omega)$ を帰納的 (回帰的) に構成する。

- (1) $X \in \omega$ のとき、 $[X] := g(D(X)) \in S(\omega)$.
- (2) $\Omega \in S(\omega)$ のとき、 $gh(\Omega) \in S(\omega)$. ($gh(\Omega)$ は $g(h(\Omega))$ の簡略形)
- (3) $\alpha, \beta \in S(\omega)$ のとき、 $\alpha \cup \beta \in S(\omega)$, $\alpha \cap \beta \in S(\omega)$.

こうしてできる $S(\omega)$ をアポーハ代数と呼ぶ¹⁶⁾。また、 $X \in \omega$ について $[X]$ を X の付値と呼ぶ。

なお、 $D(X) = M(X)^c$ より、明らかに (1) は次の (1a) と論理的に等価である。

$$(1a) X \in \omega \text{ のとき、} [X] := \{Z \in \omega \mid h(\{Z\}) \subseteq h(\{X\})\}.$$

各命題変項に対してアポーハ代数 $S(\omega)$ の値 (付値) が与えられているとき、次のように付値を論理式一般に拡大することができる (ただし、含意記号 \rightarrow の現れない論理式に限定する)。論理式 P に対する付値を $[P]$ で表す。

$$P = Q \wedge R \text{ のとき、} [P] := [Q] \cap [R] \text{ (} Q, R \text{ は論理式 (命題変項の場合を含む))}$$

$$P = Q \vee R \text{ のとき、} [P] := [Q] \cup [R]$$

$$P = \text{non}Q \text{ のとき、} [P] := gh [Q]$$

($gh [Q]$ は $g(h([Q]))$ の簡略形である。以下しばしば丸括弧を省略した類似の簡略形を用いる。)

一般的に、語群 ω における語を命題変項と見て、それらから構成される論理式を「拡大された語」と呼ぶことにする。 $P, Q \in \omega$ のとき、 $\text{non}P, \text{non}Q, P \wedge Q, P \vee Q, \text{non}P \wedge Q, \text{non}P \vee \text{non}Q$ 等はそれぞれ拡大された語である。 $X \in \omega$ の場合、(1a) より $h [X] = h\{X\} = M(X)$ であるから、 X が拡大された語の場合も含めて、 $h[X]$ を語 X の外延と呼ぶ。(ただし、 $h[X \wedge Y] = h[X] \cap h[Y]$ は必ずしも成り立たない。後述。)

さて、語 X について、その否定名辞 $\text{non}X$ の付値 $[\text{non}X] = gh[X]$ は、 g, h の定義により、 X と外延上共通部分を持たない (ω の) 要素から成る集合を意味する。三段論法の全称否定命題を用いて言い換えるならば、 $[\text{non}X] = \text{No } Z \text{ is } X$ となる Z すべての集合 ($Z \in \omega$) である。ここには「補集合」概念は現れない。オイラー図上で考えるならば、語 X の外延を表す円 (単純閉曲線) と交わらない円によって表象される外延を持つ語 $Z \in \omega$ の集合が $[\text{non}X]$ であり、それ

らZの外延M(Z)すべての和集合がnonXの外延h[nonX]になる。

これをいま前章で取り上げたuniverseすなわちIに沿って見てみよう。ここで、アポーハ代数は一般に高々可算無限個の語からなる語群で構成可能であり、そのとき対象領域の対象の個数は（可算個に限定されない）無限であってよいことは明らかであろう。また我々は無名の対象を認めることにする¹⁷⁾。

我々のuniverse $I = I_0 \cup \{M(U_i) \mid (i=1, 2, 3, \dots)\}$ (I_0 はコントロール集合) は次のような特徴を持つ。

- 1) I_0 の要素以外の各対象は、唯一の最低種 U_i に属し、複数の最低種に属することはない。
- 2) 種(類)は有限個の最低種から成る。そのとき、種(類)は最低種の上位種である。
- 3) I_0 の要素は無名である。

いま、たとえば種Pが U_1 と U_2 を下位種に持ち、種Qが U_2 と U_3 を下位種に持つとする。このとき、語群は次のようになる。

	... S_κ	... S_λ	... S_μ	... S_ν	... S_0
U_1	... ○	... ×	... ×	... ×	... ×
U_2	... ×	... ○	... ×	... ×	... ×
U_3	... ×	... ×	... ○	... ×	... ×
U_4	... ×	... ×	... ×	... ○	... ×
⋮					
P	... ○	... ○	... ×	... ×	... ×
Q	... ×	... ○	... ○	... ×	... ×

$$S_\kappa \in M(U_1), S_\lambda \in M(U_2), S_\mu \in M(U_3), S_\nu \in M(U_4), S_0 \in I_0.$$

この語群から得られるアポーハ代数上のいくつかの付値は次のようになる。

$$\begin{aligned} [U_1] &= \{U_1\}, [U_2] = \{U_2\}, [U_3] = \{U_3\}, [U_4] = \{U_4\}, [P] = \{P, U_1, U_2\}, [Q] = \{Q, U_2, U_3\}, \\ [\text{non}U_1] &= \{Q, U_2, U_3, U_4, \dots\}, [\text{non}U_2] = \{U_1, U_3, U_4, \dots\}, [\text{non}U_3] = \{P, U_1, U_2, U_4, \dots\}, \\ [\text{non}U_4] &= \{P, Q, U_1, U_2, U_3, \dots\}, [\text{non}P] = \{U_3, U_4, \dots\}, [\text{non}Q] = \{U_1, U_4, \dots\}, \\ [\text{nonnon}U_i] &= \{U_i\} = [U_i] \quad (i=1, 2, \dots), [\text{nonnon}P] = \{P, U_1, U_2\} = [P], [\text{nonnon}Q] = \{Q, U_2, U_3\} = [Q]. \end{aligned}$$

ここで明らかなように、Qは $[P] \cup [\text{non}P]$ の要素ではない。つまりこの語群は付値について排中律が成り立たない。(二重否定除去は成立する—後述。) 一方、外延については、 $h[\text{non}P] = h(\{U_3, U_4, \dots\}) = M(U_3) \cup M(U_4) \cup \dots$, $h[P] = M(U_1) \cup M(U_2)$ であるから、nonPの外延はPの外延に含まれないすべての最低種の外延の和集合になる。Qについても同様である。また、明らかに、non U_i の外延は U_i 以外の最低種の外延の和集合である ($i = 1, 2, \dots$)。

この語群では種名Xについて、その否定名辞nonXの外延はh[nonX] (=hg[X]) すなわち、Xの外延に含まれない最低種の外延の和集合として得られるのであり、おのずと無名の対象は

含まれない。

4 PかつQ — ∧について —

次の二つの語群表を考える。

	イ	ロ	ハ
P	○	○	×
Q	×	○	○

語群表 1

	イ	ロ	ハ
P	○	○	×
Q	×	○	×
R	×	○	×

語群表 2

語群表 1 から次のオイラー図 1 が、語群表 2 からはオイラー図 2 が描ける。

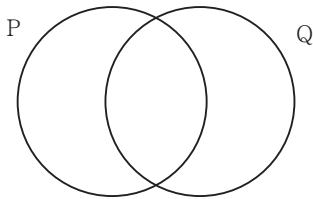


図 1

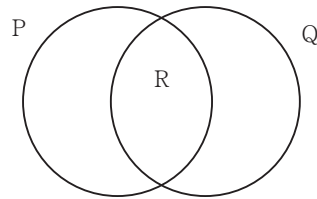


図 2

語群表 1 から得られるアポーハ代数において、 $[P]=\{P\}$, $[Q]=\{Q\}$. 従って、 $[P \wedge Q]=[P] \cap [Q]=\phi$.
 語群表 2 から得られるアポーハ代数において、 $[P]=\{P,R\}$, $[Q]=\{Q,R\}$. 従って、 $[P \wedge Q]=[P] \cap [Q]=\{R\}$.

語群表 1 (図 1) で、 $M(P) \cap M(Q) = \{\text{ロ}\}$ であるが、アポーハ代数における (拡大された) 語 $P \wedge Q$ の「外延」は $h[P \wedge Q] = \phi$ であるから、対象ロは $P \wedge Q$ の「外延」に含まれない。対象ロは語 P の外延 $M(P)$ と語 Q の外延 $M(Q)$ の共通部分に含まれる一方、拡大された語である $P \wedge Q$ の「外延」には含まれない。従って「 $P \wedge Q$ 」の意味は通常の $P \wedge Q$ の構文的意味とはズレていると言わざるを得ないであろう。

一方、語群表 2 (図 2) の場合、 $h[P \wedge Q] = h\{R\} = M(R)$ であるから、 R は種として P と Q に含まれている (P および Q は R の上位種である) と言うことができる。

一般に、所与の語群を ω とするとき、次のこと (*) が成り立つ。

(*) $A, B \in \omega$ とする。 $\exists X \in \omega (h[X] \subseteq h[A] \cap h[B]) \Leftrightarrow [A] \cap [B] \neq \phi$.

証明。

まず \Rightarrow を証明する。

ω の要素 X が存在して、 $h[X] \subseteq h[A] \cap h[B]$ とする。 $[A]=gD(A)$ だから、 $\neg (X \in [A]) \Leftrightarrow h[X] \cap D(A) \neq \phi$.

つまり、 $X \in [A] \Leftrightarrow h[X] \cap D(A) = \phi$

$$\Leftrightarrow h[X] \cap (h[A])^c = \phi$$

$$\Leftrightarrow h[X] \subseteq h[A]$$

よって、 $h[X] \subseteq h[A]$ より、 $X \in [A]$.

同様に、 $X \in [B]$. 従って、 $X \in [A] \cap [B]$. ゆえに、 $[A] \cap [B] \neq \phi$.

逆の証明。

$[A] \cap [B] \neq \phi$ より、或る $X \in \omega$ が存在して、 $X \in [A] \cap [B]$. この X について、 $X \in [A]$ より、 $h[X] \subseteq h[A]$. 同様に、この X について $h[X] \subseteq h[B]$. ゆえに、 $h[X] \subseteq h[A] \cap h[B]$.

証明終わり。

いま (*) における $X \in \omega$ を A と B の共通の下位種と呼ぶことにする。すると、

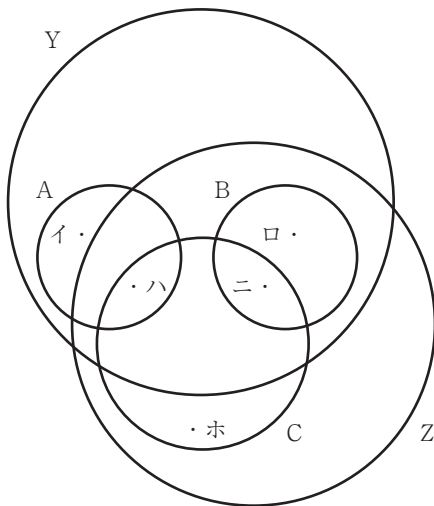
(**) $A, B \in \omega$ について、 A と B の共通の下位種が存在する $\Leftrightarrow [A \wedge B] \neq \phi$.

これより、次のことが言える。

$Z \in [A \wedge B] \Leftrightarrow Z$ は種として上位種 A と B に含まれる。

つまり、 $[A \wedge B]$ は、 A でもあり B でもある種の名前（一般的には複数）を意味する。

一方、次のオイラー図を取りあげる。



これは例えば次の語群表から得られる。

	イ	ロ	ハ	ニ	ホ
A	○	×	○	×	×
B	×	○	×	○	×
C	×	×	○	○	○
Y	○	○	○	○	×
Z	×	○	○	○	○

この語群表における各語の付値は次のようになる。

$[A]=\{A\}, [B]=\{B\}, [C]=\{C\}, [Y]=\{A, B, Y\}, [Z]=\{B, C, Z\}.$

従って、 $[Y \wedge Z] = [Y] \cap [Z] = \{B\}$. よって、 $h([Y \wedge Z]) = h([Y] \cap [Z]) = h(\{B\}) = \{\text{ロ}, \text{ニ}\}$. 一方、 $h([Y]) \cap h([Z]) = \{\text{ロ}, \text{ハ}, \text{ニ}\}$. ゆえに、 $h([Y] \cap [Z]) \neq h([Y]) \cap h([Z])$.

つまり、対象ハは語Yの外延と語Zの外延の共通部分に含まれる一方、拡大された語であるY ∧ Zの「外延」には含まれない。これはYとZの共通の下位種がBであるが、対象ハはM(B)の要素ではないからである。アポーハ代数的には「Y ∧ Z」はYとZの共通の下位種として読む必要がある。

我々が先に設定したuniverse I においては種名は悉く所与の語群 ω に含まれ、各 U_i が最低種であるから、一般的な種 $P, Q \in \omega$ について、($M(P) \cap M(Q) = \phi$ でない限り) P と Q は共通の下位種を含んでおり、「 $P \wedge Q$ 」のアポーハ代数的な意味は常に保たれている。

[むすび]

Universe I は次のような特徴を持っている。

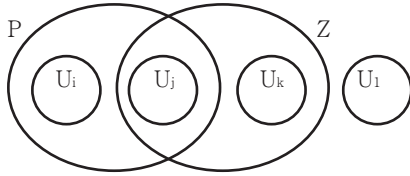
- (1) 任意の種 P について、その外延 $M(P)$ と否定名辞not- P / non P の外延 $M(\text{not-}P)$ / $h[\text{non}P]$ が存在する、すなわちKeynesの要請が満たされる。ただし、否定名辞は種名にはならない。
- (2) 任意の種 P について、コントロール集合 $I_0 \subset M(\text{not-}P) = M(P)^c$ である。一方、アポーハ代数による否定名辞non P の外延 $h[\text{non}P]$ ($=hgh[P]$)は I_0 と交わらない。
- (3) 任意の種 P, Q について、「 $P \wedge Q$ 」($[P \wedge Q]$)は、アポーハ代数的解釈によって、 P と Q に共通な下位種を意味する。
- (4) 任意の種 P について、 $[\text{nonnon}P] = [P]$. 従って、 $h[\text{nonnon}P] = h[P] = M(P)^{18}$ 。

(1), (2), (3)はこれまで述べてきたことから明らかである。(4)について以下証明する。

(4)の証明。

第3節の(1a)より、外延の一部分のみを語 P と共有する語のみが、 $[P]$ にも $[\text{non}P]$ にも含まれない。一方、 $[\text{nonnon}P] = [P]$ が成り立つための必要十分条件は、 $[P]$ にも $[\text{non}P]$ にも含まれない任意の語 $Z \in \omega$ について $M(Z) \cap h[\text{non}P] \neq \phi$ となることであるが(上田・平林, 定理4.3)、universe I においてはどの種も最低種から構成されているから、 $[P]$ にも $[\text{non}P]$ にも含まれない任意の語 $Z \in \omega$ の外延は、 $[\text{non}P]$ に含まれる最低種の少なくとも一つの外延を含む。よって、 $M(Z) \cap h[\text{non}P] \neq \phi$. 従って $[\text{nonnon}P] = [P]$.

下線部の意味は、例えば次のオイラー図において、 $[P]$ ($\{U_i, U_j, \dots\}$)にも $[\text{non}P]$ ($\{U_k, U_l, \dots\}$)にも含まれない語 Z について $M(Z) \cap h[\text{non}P] \supseteq M(U_k) \neq \phi$ ということである。

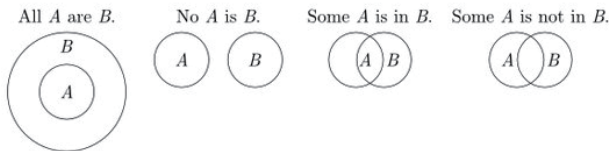


(4) の証明終わり

名辞Pについて、その否定名辞nonPの外延を、 $[\text{nonP}] = \text{No Z is P}$ となるZすべての集合（Zは論議領域上の種名）を介して、 $h[\text{nonP}]$ と定めることができる。このようなアポーハ論的否定による解釈においては、補集合による解釈と異なり、対象の全体集合は顕在化せず、各々の種名の外延をのみ考慮すればよい。また、この否定は論議領域のモデルuniverse I 上では外延に関して二重否定除去が成り立つ否定（ $h[\text{nonnonP}] = h[P]$ ）、その意味では古典論理的否定であることに注意すべきであろう。

【注】

- 1) 定立的否定／非定立的否定の他に、相対的否定／絶対的否定、にあらざる否定／なしの否定など、インド思想の研究者の間で多くの訳語（解釈）がある。
- 2) オイラー自身の図は“Lettres à une princesse d'Allemagne”（1768）に登場するといわれるが（未見）、Stanford Encyclopedia of Philosophy (<http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/>) にはオイラー自身の図が次のように紹介されている。



ここに「全体集合」は（図形としては）描かれていない。J.M.Bochenski（1956）によれば、オイラー以前にライプニッツが三段論法を三個の円を用いて解釈しているが、そこにも「全体集合」は描かれていない。オイラーより後ヴェン（Venn）はクラス（Klasse）が三個より多い場合も扱う中で、円の代わりに楕円を用い、また空でない部分を星印によって印づけたが（Bochenskiはライプニッツ自筆の図を写真版で載せ、さらにヴェンの図を「活字」で再現している）、いずれも「全体集合」を表す図形（長方形や円による外枠）は描かれない。

- 3) *Logic part I*. Cf. <http://archive.org/stream/logic01john>.
- 4) クラス（class）が存在するとはそのクラスに属する対象が少なくとも一つ存在することであると考えられる。なお、この引用における前提（assumption）は伝統的な論理学（the traditional treatment of logic）における暗黙の前提であったと Keynes は言う（*ibid.*, p.93, n.1）。
- 5) 論議領域（universe）が限定されているからといって、否定名辞が表示するクラスが常に有意味であるとは限らない。たとえば、色彩のuniverseを考えると、「非青」は青以外の色を表すであろうが、赤色や黄色と異なり、非青は一つの色種というわけにはいかないであろう。もし「非青」という色彩があるとすれば、それはどのような属性を持つのであろうか（「青に非ず」というのは

- 青を青たらしめる属性—そのような属性が存在するとして—と同列に論ずることのできる属性であろうか)。同様に、冒頭で述べたようにインド論理学では、たとえば「非バラモン」(a-brāhmaṇa)の意味は否定辞(a-)を定立的否定と解釈すれば、クシャトリヤやヴァイシャといったヴァルナ(カースト)であるが、「非バラモン」はそのままでは特定のヴァルナに限定されない。「非バラモン」は「非青」と似た状況にある(「バラモンに非ず」という属性はヴァルナを特定するには不十分である)。
- 6) De Morganは usually called contradictory として “contrary” を用いている (cf.p.14)。
- 7) 述語論理学では言語(構文)の意味解釈が行われる集合 U (領域, Domain) の要素 u, v, \dots に対して構文上の名前 $\underline{u}, \underline{v}, \dots$ を対応させるといったことが行われる(小野 p.66)。本論で言う「名前」はそのような Domain 上の対象の名前(固有名)ではなく、述語論理的には対象 x に関する一項述語「 $(x$ は)名前 P を持つ」に対応する。「 x は名前 P を持つ」ことの否定は直ちに「 x は名前 not- P を持つ」ことを意味しない。
- 8) Universe に一個の名前を付して、その名前がすべての対象(object)の名前になることは、不要なこととして de Morgan は次のようにこれを避けている。By the *universe* (of a proposition) is meant the collection of all objects which are contemplated as objects about which assertion or denial may take place. *Let every name which belongs to the whole universe be excluded as needless: this must be particularly remembered.* (Syllabus, § 16. イタリックは原文) さらに次のようにも述べる。I have, § 16, required that no term shall be introduced which fills the whole universe. In common logic, with an unlimited universe, there is really no name as extensive as the universe except *object of thought*. (Ibid., commentary on § 69.)
- 9) Shin (1994, p.36) によると、Lambert は特称命題の主語については点線(dots)を用いている。
- 10) 数学的には「コントロール集合の外測度 = 0」と表現される。(寺澤 p.39 参照)
- 11) インド論理学には、牛の下位区分である斑牛(śābaleya) および黒牛(bāhuleya)は、もはやそれぞれの下位区分を持たないとする立場が存在した(吉水 2014, 注 15 参照)。これは、斑牛および黒牛をそれぞれ最低種と見る立場と言えよう。
- 12) 須藤 (1971, p.28)
- 13) 論議領域(universe)に設定される種名は伝統的論理学においては有限個であると考えられる。従って、厳密には最低種の個数に応じて universe は区間 I の何らかの部分に制限される(有限モデル)。区間 I 全体を universe として無限個の最低種を設定する本論のモデルは、いわば論議領域の可算無限モデルである。
- 14) ラバ(騾馬)は雄ロバと雌馬の交配によって生まれるが、ラバは繁殖力がなく、ラバからラバは生まれない。すると、名辞 P について「 P は P から生まれる」ことを P が種名であるための必要条件とすると、「ラバ」は種名ではない。さらに、1) universe における対象(個体)がロバと馬とラバだけであるとする。このとき、「not-ロバ」の外延は「馬」の外延とラバどもであり、また「not-馬」の外延は「ロバ」の外延とラバどもである(このとき Keynes の要請が満たされる)。この universe (と種名構造)において、ラバどもは種名を持たない、すなわち無名となる。2) さらに今、「ロバ」および「馬」の上位区分として「動物」を(種名構造に)追加する(この際 Keynes の要請を満たすために、「not-動物」の外延、すなわち「植物」等の外延を universe に含める必要がある)。すると、「動物は動物から生まれる」および「ラバは動物である」はともに真と見なせるから、個々のラバは「動物」なる種名を持つと言える。しかし「動物」は最低種名ではない。従って、個々のラバはいずれの最低種にも属さないが上位種(動物)には属することになる。本文における(開線分を用いた)モデル I は、2) のようなケースには妥当しない。なお、モデル I において論議領域に無名の対象(すなわち種名を持たない対象)が存在しうるのは伝統的論理学からの逸脱であるかも知れない。
- 15) アポーハ代数とは、アポーハ論一語の意味を「他の排除(apoha)」とするインド仏教僧ディグナーガ(陳那, 5-6世紀)の言語理論—に基づく、語の意味の数理モデルに関連して得られる束(lattice)であり、集合演算 \cup, \cap , および本文で定義される合成関数 gh に関して閉じている。詳しくは上田・

平林（2012）を参照。また、「アポーハ代数」の背景にあるディグナーガのアポーハ論については上田（2013）— 拙論 p.435 の $g(a)$ は $gh(a)$ に要訂正— を参照。

- 16) 定義の (1) により、 $[X]$ の補集合 $(\omega - [X])$ は、外延が語 X の排除対象 $D(X)$ と交わる語の集合すなわち $\{Z \in \omega \mid M(Z) \cap D(X) \neq \emptyset\}$ を表す。アポーハ論の言う「他の排除」 (= 語の意味) をこの (下線の) 意味で解釈することができると思われる。アポーハ代数と名付ける所以である。
- 17) 上田・平林（2012）では、どの対象も少なくとも一つの語の外延に含まれるとの前提下でアポーハ代数を考えたが、今はその前提を外す。
- 18) P が拡大された語 (論理式) の場合、universe I において、 $[\text{nonnon}P]=P$ は必ずしも成り立たないが、 $h[\text{nonnon}P]=h[P]$ は成り立つ。詳細は別稿を期す。

【参考文献】

- Bochenski, J.M. 1956. *Formale Logik*. Alber, 4.Aufl. 1978 (1.Aufl. 1956).
- De Morgan, A. 1860. *Syllabus of A proposed System of Logic*. London, Walton and Maberly.
- Keynes, J.N. *Studies and exercises in formal logic*, third ed. 1894 (first edition 1884).
- Prior, A.N. 1962. *Formal Logic*, 2nd ed. Oxford.
- Shin, Sun-Joo 1994. *The Logical Status of Diagrams*. Cambridge University Press.
- 上田昇・平林隆一 2012. 「アポーハ代数とそのグラフ理論的解釈」目白大学経営学研究 Vol.10
- 上田昇 2013 「アポーハ論的「排除」について」印度学仏教学研究 62-1
- 小野寛晰 1994 『情報科学における論理』日本評論社
- 須藤新吉 『論理学綱要』改訂版 1971 (初版 1926).
- 寺澤順 『はじめてのルベーグ積分』日本評論社 2009
- 松本幸夫 『トポロジー入門』岩波 1985 (オンデマンド版 2012).
- 吉水清孝 2012 「クマーリラにおける個体中心の存在論」『インド論理学研究 V』山喜房佛書林

(平成 26 年 11 月 4 日受理)