目白大学　経営学研究
第10号　2012年　29-42

論文

アポーハ代数とそのグラフ理論的解釈

Apoha Algebra and its Graph-Theoretic Interpretation

上田　昇、平林　隆一
(Noboru UEDA, Ryuichi HIRABAYASHI)

【アブストラクト】

本論文では，古代インドの因明学者ディグナーガの「アポーハ論」に焦点をあてる．まず，ディグナーガによって定義されたアポーハ論に基づいてアポーハ代数を定義し，アポーハ代数において成立する基本的な性質を証明する．ここで注意しておきたいのは，アポーハ代数では de Morgan's law の片方しか成立しないことである．このことはアポーハ代数が西洋古典論理と異なることを示している．さらにアポーハ論にグラフ理論的な解釈を導入する．このことによって，アポーハ代数が二重否定と排中律を満たすための条件を導くことができる．

キーワード：ディグナーガ，アポーハ，アポーハ代数，二重否定，排中律

【Abstract】

In this paper, we study the logic of "Apoha", which was developed first by Dignāga in ancient India. We first define "Apoha algebra" and prove some fundamental theorems. Here, we notice that Apoha algebra satisfies only one side of De Morgan's law. This means that the logic of Apoha algebra is different from the standard classical logic developed in the western world. Then we introduce a very simple graph-theoretic translation of Apoha. This translation makes it possible to find conditions under which Apoha algebra satisfies the laws of double negation and of the excluded middle.

Keyword：Dignāga, Apoha, Apoha algebra, double negation, excluded middle

うえだのぼる：目白大学看護学部看護学科
ひらばやしりゅういち：目白大学経営学部経営学科
受付日　2011年10月14日
受理日　2011年12月 2日

1　はじめに

哲学が諸学に君臨する学であることはいうを俟たない．哲学の下に数学も発生した．物理学が学として成立するのはその後である．経営学を含む社会科学は物理学をその規範モデルとして発展した．ところで，哲学を含むすべての学は，人間による知識の獲得活動といっても過言ではないであろう．現在，我々が通常学というとき，ギリシャを起源とするものをイメージする．しかし，学は東洋にも当然あった．特に古代インドでは，「知識」の手段・根拠についての考察が積み上げられている．「知識」の手段・根拠についての考察が明らかにならなければ，すべての学はその根拠を失うであろう．ここでは，その古代インドの考察を，現代論理学あるいは数学の助けを借りて明確にし，発展させようという試みの一つである．特に，ディグナーガの「集量論」に焦点をあてる．ディグナーガの「集量論」を取り上げる根拠は，山内［８］に『インドの論理学史に於いて一時期を劃する文献としてはガウタマのNyāya-sūtra（正理経）と仏教のディグナーガの Pramāṇasamuccaya（集量論）と，及びミティラー学派の開祖，ガンゲーシャの Tattvacintāmaṇi（真理の如意宝）とが挙げられる．ガウタマは紀元二世紀頃の人，ガンゲーシャは十二世紀の出世であるからこの間に一千年の隔たりがある．ディグナーガは恰もその中間にあって大凡紀元後四〇〇年から四八〇年頃在世の人であり，しかも新因明は彼によって大成せられインドの形式論理はこの頃に到って殆ど完成せられたといってよい．その功績はアリストテレスの鴻業にも比せらるべきであろう』とあるのを見れば十分であろう．ディグナーガのアポーハ論に対する詳細な研究と文献については上田［１］を見られたい．

古代インドの諸学派が発した問いの一つに，人間の知識は何を手段・根拠とするかというものがある．ここで，手段・根拠の原語はプラマーナと呼ばれ「量」と漢訳された．代表的な量として，知覚（現量）と推論（比量）があるが，この他にヴェーダ聖典の言葉を量（聖言量）として認める学派（ミーマーンサー学派など）が存在した．また他方，知覚のみを量と認める唯物論的立場や，比喩や「無」を量に数える立場も存在した．幾種類の量を認めるかによって，一量論，二量論，三量論などと称すが，仏教は現・比・聖言量の三量論ないし現・比二量論であった．このうち，二量論は仏陀の言説をそれ自体では独立した量とは認めないというものであり，仏教経典の聖言量としての地位は，ミーマーンサー学派にとってのヴェーダ聖典の地位ほどには高くないと言える．アポーハ論（「アポーハ（apoha）」とは排除の意味）は，この二量論の論証を目指してディグナーガ（陳那，5–6世紀）が行った言語論・知識論に始まる．言葉による知，すなわち言葉の意味は「他の排除」に他ならない，というのがアポーハ論の基本命題である．そして，「他の排除」は言葉と推論（比量）とに共通するあり方と見られる．例えば，山の煙がその山の火を知らしめるという比量において，煙は非火（火ならざるもの）を排除する，とディグナーガは言う．

ディグナーガの二量論は，言葉としての仏説の真理性に一種の間接性を要求するものであり，それゆえ必ずしも全ての仏教徒の承認する立場とはならなかったと見られるが，知覚（現量）についての自己認識論（自証説）とともに仏教教理に大きな影響を及ぼした．ただ，我が国にはディグナーガの理論の詳細は専ら知覚論（自証説）に沿って，唯識学説として玄奘（602–664）を経て知られたにとどまり，アポーハ論そのものの詳細は知られることがなかった．ディグナーガのそれを含めてインド仏教におけるアポーハ論が世に知られるようになったのは，（チベット仏教の伝統を除けば）近現代の仏教学を通してである．

本来，アポーハ論は聖言量の独立性を否定して，聖言量を比量に還元する目的を持った議論であるが，その実，そこに登場するのは専ら「青」「蓮華」「瓶」「樹木」「シンシャパー」（樹木の一種類）「カディラ」（樹木の一種類）「土より成るもの」「実体」「性質」「存在」などという諸々の語であり，聖言といった風情はない．我々は宗教的文脈を離れて，ディグナーガのアポーハ論を取り上げることが可能であると思われる．言葉（語）の意味は「他の排除」に他ならない，というアポーハ論の基本命題は如何に理解できるか．我々はJ.トゥリーア（Trier, 1894–1970）の言う（一定の語群の作る）「意味場」[注1]の観点からディグナーガのアポーハ論にアプローチすることが有効であると考えるが，

本稿ではこの観点からアポーハ論的な語の否定を数理論理学的に形式化することを試みた．さらに語群（意味場）そのものをグラフ論的に捉えることによって，アポーハ論的否定の挙動について，一層深い分析が可能であることが示される．

２　アポーハ代数

ωを語の集合とし，Sを対象の集合とする．さらに，$P(\omega)=2^{\omega}, P(S)=2^{S}$を$\omega, S$それぞれの巾集合とする．このとき，写像$M:\omega \to 2^{S}$を$M(X)\neq\emptyset,\ \forall X\in\omega$，写像$D:\omega\to 2^{S}$を$D(X)\neq\emptyset,\ \forall X\in\omega$となるように定義する．このとき$M(X)\ (\forall X\in\omega)$を語$X\in\omega$の適用対象の集合（語$X$の外延）といい，$D(X)\ (\forall X\in\omega)$, $D(X)=S-M(X)$を語$X\in\omega$の排除対象の集合（語Xのアポーフヤ（apohya））ということにする（ここで，集合U,Vに対してUとVの差集合を$U\setminus V$で表すのが普通であるが，本論では$U-V$で表すことにする）．このとき，2つの写像M,Dは次の条件を満たすものとする．ただし，条件（2）はMの定義に既に含まれているが，再確認のためもあって，載せておくことにする．条件：

（1）$\forall s\in S$も，ωに対するMの適用がsに対して適正である語がωにある（$\exists X\in\omega, s\in M(X)$）．このことを言い換えると，対象$s$に対する$M$の適用が適正であるとは$s\in M(X)$となる$X\in\omega$が存在するという意味である．

（2）$\forall X\in\omega$も，Xに対するMの適用が適正である対象がSにある（$M(X)\neq\emptyset$）．ここで，語Xに対するMの適用が適正である対象とは$s\in M(X)$となる$s\in S$が存在する（$\exists s\in S, s\in M(X)$）という意味である．

話が抽象的であるので，ここで上のことを例を用いて説明しておくことにする．

例１　　表1．アポーハの例

	イ	ロ	ハ	ニ
A	○	×	×	×
B	×	○	○	×
C	×	○	×	○
D	○	×	×	○

この例では$\omega=\{A,B,C,D\}, S=\{$イ,ロ,ハ,ニ$\}$である．また．○がMの適用が適正であることを示し，×がMの適用が不適正であるものを示している．したがって．この例では

$M(A)=\{$イ$\}, M(B)=\{$ロ,ハ$\}, M(C)=\{$ロ,ニ$\}, M(D)=\{$イ,ニ$\}$

であり，

$D(A)=\{$ロ,ハ,ニ$\}, D(B)=\{$イ,ニ$\}, D(C)=\{$イ,ハ$\}, D(D)=\{$ロ,ハ$\}$

である．

このとき条件（1）は上の表を縦に見て，どの列にも必ず○があるということを意味し，条件（2）は上の表を横に見て，どの行にも必ず○があるということを意味している．

ここで，$h:2^{\omega}\to 2^{S}$を$h(\Omega)=\cup\{M(X)\mid X\in\Omega\}\ (\forall\Omega\in 2^{\omega})$によって定義する．このとき，条件（1）によって$h(\omega)=S$であり，条件（2）によって，$h(\Omega)=\emptyset$ならば$\Omega=\emptyset$である．

次に，$g:2^{S}\to 2^{\omega}\ (\Omega\in 2^{\omega})$を$T\in 2^{S}$に対して$g(T)=\{A\in\omega\mid h(\{A\})\cap T=\emptyset\}$とする．これは，$g(T)$は$h(\Lambda)\cap T=\emptyset$となる最大の$\Lambda\subseteq\omega$であることと定義することと同じである．

h,gについても例で考えてみると，

$h(\emptyset)=\emptyset, h(\{A\})=\{$イ$\}, h(\{B\})=\{$ロ,ハ$\}, h(\{C\})=\{$ロ,ニ$\}, h(\{D\})=\{$イ,ニ$\}$,

$$h(\{A,B\}) = \{イ,ロ,ハ\}, h(\{A,C\}) = \{イ,ロ,ニ\}, h(\{A,D\}) = \{イ,ニ\},$$
$$h(\{B,C\}) = \{ロ,ハ,ニ\}, h(\{B,D\}) = \{イ,ロ,ハ,ニ\}, h(\{C,D\}) = \{イ,ロ,ニ\},$$
$$h(\{A,B,C\}) = \{イ,ロ,ハ,ニ\}, h(\{A,B,D\}) = \{イ,ロ,ハ,ニ\}, h(\{B,C,D\}) = \{イ,ロ,ハ,ニ\}$$
$$h(\{A,B,C,D\}) = \{イ,ロ,ハ,ニ\}$$

また,

$$g(\varnothing) = \omega, g(\{イ\}) = \{B,C\}, g(\{ロ\}) = \{A,D\}, g(\{ハ\}) = \{A,C,D\}, g(\{ニ\}) = \{A,B\},$$
$$g(\{イ,ロ\}) = \varnothing, g(\{イ,ハ\}) = \{C\}, g(\{イ,ニ\}) = \{B\},$$
$$g(\{ロ,ハ\}) = \{A,D\}, g(\{ロ,ニ\}) = \{A\}, g(\{ハ,ニ\}) = \{A\}, g(\{イ,ロ,ハ\}) = \varnothing,$$
$$g(\{イ,ロ,ニ\}) = \varnothing, g(\{ロ,ハ,ニ\}) = \{A\}, g(\{イ,ロ,ハ,ニ\}) = \varnothing$$

となる.

ここで，アポーハ代数（Aphoha algebra）を定義することにしよう．そのために，まず語ωの巾集合2^{ω}の中に次のように，（帰納的に）集合$S(\omega)$を構成する．

（1）$X \in \omega$ のとき，$[X] := gD(X) \in S(\omega)$とする．

（2）$\Omega \in S(\omega)$のとき，$gh(\Omega) \in S(\omega)$．

（3）$\alpha, \beta \in S(\omega)$のとき，$\alpha \cup \beta \in S(\omega), \alpha \cap \beta \in S(\omega)$．

このとき，$S(\omega)$を（演算$\cup, \cap, gh$に関して閉じている）アポーハ代数[注2]と呼ぶ.

ここでも，例について考えてみよう．

表2．表1に対応する[ ]，gh[ ]，$ghgh$[ ]

	[ ]	gh[ ]	$ghgh$[ ]
A	$\{A\}$	$\{B, C\}$	$\{A\}$
B	$\{B\}$	$\{A, D\}$	$\{B\}$
C	$\{C\}$	$\{A\}$	$\{B, C\}$
D	$\{A, D\}$	$\{B\}$	$\{A, D\}$

である．これらを使って，表1から得られる$S(\omega)$について，要素の包含関係を示すハッセ図を描くと図3のようになる．

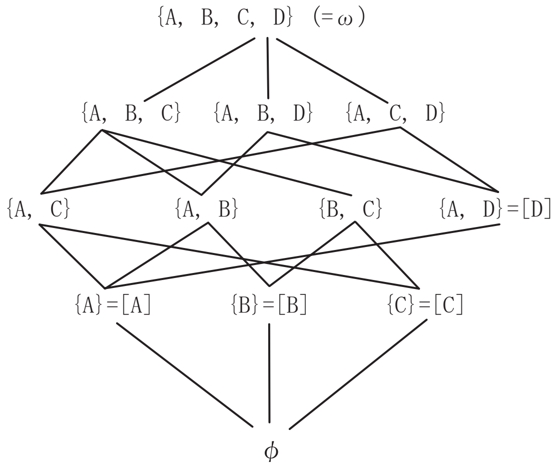

図3．例1に関する$S(\omega)$の元のHasse図

表１におけるωは4語から成るから，その巾集合の要素は16であるが，上図から分かるように$S(\omega)$ の要素の数は12である．すなわち，一般的に$S(\omega)$は必ずしも$P(\omega)$と一致しない．

さて，何故写像ghを考えるのかということに関してWittgenstein流に考えてみよう．Wittgensteinの『論考』［13］のように考えると，対象と語の間には必然的に写像関係で結ばれているが，これは当然$\omega \to S$という写像にはならない．語の多義性によって，一つの語が複数個の現象に対応することがあるからである．したがって，語と対象の間の写像は$M:\omega \to 2^S$という写像とならざるを得ない．このとき，$\Omega \subseteq \omega$の否定は，Ωを対象空間Sに写像した像$h(\Omega)$と，その像が共通部分をもたない言語空間ω内の最大の部分集合であると考えるのが自然である．これは$gh(\Omega)$で得られるから，$gh:2^\omega \to 2^\omega$が，ある語の集合Ωの否定$gh(\Omega)$を与えると考えるのは，極めて自然である．

ここでも例に対して語集合の否定を考えると，

$$
\begin{aligned}
&gh(\varnothing)=g(\varnothing)=\omega, gh(\{A\})=g(\{イ\})=\{B,C\}, gh(\{B\})=g(\{ロ,ハ\})=\{A,D\},\\
&gh(\{C\})=g(\{ロ,ニ\})=\{A\}, gh(\{D\})=g(\{イ,ニ\})=\{B\},\\
&gh(\{A,B\})=g(\{イ,ロ,ハ\})=\varnothing, gh(\{A,C\})=g(\{イ,ロ,ニ\})=\varnothing,\\
&gh(\{A,D\})=g(\{イ,ニ\})=\{B\}, gh(\{B,C\})=g(\{ロ,ハ,ニ\})=\{A\},\\
&gh(\{B,D\})=g(\{イ,ロ,ハ,ニ\})=\varnothing, gh(\{C,D\})=g(\{イ,ロ,ニ\})=\varnothing,\\
&gh(\{A,B,C\})=g(\{イ,ロ,ハ,ニ\})=\varnothing, gh(\{A,B,D\})=g(\{イ,ロ,ハ,ニ\})=\varnothing\\
&gh(\{B,C,D\})=g(\{イ,ロ,ハ,ニ\})=\varnothing, gh(\{A,B,C,D\})=g(\{イ,ロ,ハ,ニ\})=\varnothing
\end{aligned}
$$

である．

ここでアポーハ代数$S(\omega)$で成り立つ事柄をあげておく．

定理2.1. $\forall\alpha \in S(\omega)$について，$\alpha \cap gh(\alpha)=\varnothing$.

証明　明らか. ■

注：　$\alpha \cup gh(\alpha)=\omega$は必ずしも成り立たない．これは，例において，$gh(\{A\})=g(\{イ\})=\{B,C\}$となることを見れば分かる．このことは，排中律（Principium exclusi tertii, Tertium non datur, Law of excluded middle, Law of excluded third）が成立しないということである．

定理2.2. $\forall\alpha \in S(\omega)$について，$\alpha \subseteq ghgh(\alpha)$.

証明　$A\in\alpha$ならば，$h(\{A\})\subseteq h(\alpha)$．よって，$g,h$の定義より，$hgh(\alpha)\cap h(\{A\})=\varnothing$．ゆえに，$A\in ghgh(\alpha)$. ■

定理2.3. $\forall\alpha,\beta\in S(\omega), \alpha\subseteq\beta$について，$gh(\beta)\subseteq gh(\alpha)$.

証明　$A\in gh(\beta)$ならば, gの定義によって，$h(\beta)\cap h(\{A\})=\varnothing.\alpha\subseteq\beta$であるから，$h(\alpha)\subseteq h(\beta)$である．したがって，$h(\alpha)\cap h(\{A\})=\varnothing$．よって，$A\in gh(\alpha)$．ゆえに$gh(\beta)\subseteq gh(\alpha)$. ■

定理2.4. $\forall\alpha \in S(\omega)$について，$gh(\alpha)=ghghgh(\alpha)$.

証明　定理2.2によって$gh(\alpha)\subseteq ghghgh(\alpha)$であるから, $gh(\alpha)\supseteq ghghgh(\alpha)$を証明する．$\alpha\subseteq ghgh(\alpha)$（定理2.2）に定理2.3を適用して，$ghghgh(\alpha)\subseteq gh(\alpha)$．ゆえに，$gh(\alpha)=ghghgh(\alpha)$. ■

定理2.5. $\forall\alpha,\beta\in S(\omega)$ について，$gh(\alpha\cup\beta)=gh(\alpha)\cap gh(\beta)$．（de Morgan's law）

証明　$gh(\alpha\cup\beta)\subseteq gh(\alpha)\cap gh(\beta)$を証明する．$A\in gh(\alpha\cup\beta)$とする．すると，$gh$の定義から$M(A)\cap h(\alpha\cup\beta)=\varnothing$である．これより，$M(A)\cap h(\alpha)=\varnothing, M(A)\cap h(\beta)=\varnothing$が成り立つ．したがって，$A\in gh(\alpha)$,

$gh(\beta)$となる．したがって，$A \in gh(\alpha) \cap gh(\beta)$である．

今度は，$gh(\alpha \cup \beta) \supseteq gh(\alpha) \cap gh(\beta)$を証明する．$A \in gh(\alpha) \cap gh(\beta)$とすると，$A \in gh(\alpha), gh(\beta)$であるから，$M(A) \cap h(\alpha) = \varnothing, M(A) \cap h(\beta) = \varnothing$が成り立つ．これより$M(A) \cap h(\alpha \cup \beta) = \varnothing$となるから，$A \in gh(\alpha \cup \beta)$である． ■

定理2.6. $\forall \alpha \in S(\omega)$について，$ghgh\big(\alpha \cup gh(\alpha)\big) = \omega$．

証明　定理2.5（de Morgan's law）により，$gh(\alpha \cup gh(\alpha)) = gh(\alpha) \cap ghgh(\alpha)$．定理2.1により，$gh(\alpha) \cap ghgh(\alpha) = \varnothing$．よって，$gh(\alpha \cup gh(\alpha)) = \varnothing$．ゆえに，$ghgh(\alpha \cup gh(\alpha)) = gh(\varnothing) = \omega$． ■

de Morgan's lawには$gh(\alpha \cap \beta) = gh(\alpha) \cup gh(\beta)$があるがこれは一般には成り立たない．例において$\alpha = \{A,B\}, \beta = \{A,C\}$とすると，$\alpha \cap \beta = \{A\}$であるが，すると$gh(\alpha \cap \beta) = gh(\{A\}) = \{B,C\}$，$gh(\alpha) \cup gh(\beta) = gh(\{A,B\}) \cup gh(\{A,C\}) = \varnothing$であるから，de Morgan's law は成り立たない．

系2.1. 定理2.2と定理2.3は次の条件と等価である．

$\forall \alpha, \beta \in S(\omega)$ について，$\alpha \subseteq gh(\beta) \Leftrightarrow \beta \subseteq gh(\alpha)$．　（$\Leftrightarrow$は両方向の含意を表す．）

証明　定理2.2と定理2.3が成り立つものとする．まず，$\alpha \subseteq gh(\beta)$とする．定理2.3によって，$ghgh(\beta) \subseteq gh(\alpha)$である．ここで定理2.2を使うと$\beta \subseteq ghgh(\beta) \subseteq gh(\alpha)$が成り立つ．これより$\alpha \subseteq gh(\beta) \Rightarrow \beta \subseteq gh(\alpha)$が成り立つことがいえた．また，議論の対称性によって$\alpha \subseteq gh(\beta) \Leftarrow \beta \subseteq gh(\alpha)$が成り立つこともいえる．

逆の証明は Ganter und Wille［９］を参考にすると得られる．

系2.1の条件をRと呼ぶ．条件Rの下で定理2.2，定理2.3が得られることを示す．$gh(\alpha) \subseteq gh(\alpha)$だから条件Rを適用する（条件Rにおいて$\alpha$を$gh(\alpha)$で，$\beta$を$\alpha$で置き換える）と，$\alpha \subseteq ghgh(\alpha)$（条件Rの右辺），すなわち定理2.2が得られる。$\beta \subseteq ghgh(\beta)$（定理2.2）だから，$\alpha \subseteq \beta$ならば$\alpha \subseteq ghgh(\beta)$．これに条件Rを適用する（条件Rにおいて，$\alpha$ を$gh(\beta)$で，βをαで置き換える）と，$gh(\beta) \subseteq gh(\alpha)$（条件Rの左辺）が得られる．つまり，定理2.3が成り立つ。 ■

３　ブリッジ型語群

ブリッジ型語群とは，表４のような２語・３対象から成る語群を鎖状に有限個つないでできる語群のことを，あるいは行（語）と列（対象）を適宜入れ替えればそのような語群になる語群のことをいう．

表４．ブリッジ

	イ	ロ	ハ
A	○	○	×
B	×	○	○

表５．ブリッジ型語群の例

	イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	チ
A	○	○	×	×	×	×	×	○
B	×	○	○	○	×	×	×	×
C	×	×	×	○	○	○	×	×
D	×	×	×	×	×	○	○	○
(A)	○	○	×	×	×	×	×	○)

表５に見る語群はこれを４個つないでできる語群であり，これも「ブリッジ型」である．さらに，この語群は２語・３対象の（極小）ブリッジ型でつながる環（A-B-C-D-A）になっている（そのことを明示するため最下行に語Ａを補った）．

なお，「ブリッジ型」という用語は，野林［７］から拝借したものであるが，そこでは、事実上我々のいう２語・３対象の（極小）ブリッジ型のことを言う．「ブリッジ型語群」は構造が単純であるので，論理構造を考えるためには，都合がよい．そこで，ここに取り上げておくわけである．ただし，上の定義は極めてあいまいである．例えば，上田［２］で分析されている『「いき」構造』のアポーハ論による分析で使用されている例は，ブリッジ型ということになるのかならないのか不明確である．次節で，ブリッジ型語群をグラフ理論的に言い換えているが，この場合には，ブリッジ型語群を極めて狭くとらえている．いいかえれば次節の命題が本論でいう場合のブリッジ型語群の定義といってよい．しかし，そのように狭くとらえると，実際の語群の分析に支障を来す恐れがないとはいいきれない．この問題については，稿を改めて論ずる必要があろう．本論では，アポーハ代数の単純な例としてしか扱わず，ブリッジ型語群そのものの本質的な議論には踏み込まないからである．

ここで，一般の場合にひとまずもどって，アポーハ代数を一つ固定し，それを$S(\omega)$とする．いま，各命題変数に対して，それぞれ$S(\omega)$の値（付値）が与えられているとする．この付値を次のように，論理式一般に（帰納的に）拡張する．但し，今は<u>含意記号（$\to$）の現れない論理式</u>のみを考える．また，論理式Pに対する$S(\omega)$上の付値を$[P]$で表す．

$P = A \wedge B$のとき, $[P] = [A] \cap [B]$
$P = A \vee B$のとき, $[P] = [A] \cup [B]$
$P = nonA$のとき, $[P] = gh[A]$

この付値を「ブリッジ型語群」に適用してみよう．

例２　　表６．付値の例（１）

	イ	ロ	ハ	ニ	ホ	[ ]	$gh[\ ]$ [non]	$ghgh[\ ]$ [nonnon]
A	○	○	×	×	×	$\{A\}$	$\{C, D\}$	$\{A\}$
B	×	○	○	×	×	$\{B\}$	$\{D, E\}$	$\{B\}$
C	×	×	○	○	×	$\{C\}$	$\{A, E\}$	$\{C\}$
D	×	×	×	○	○	$\{D\}$	$\{A, B\}$	$\{D\}$
E	○	×	×	×	○	$\{E\}$	$\{B, C\}$	$\{E\}$

この例について広義の語$A \vee C, non(A \vee C), nonnon(A \vee C)$のアポーハ代数上の付値を求めると，

$[A \vee C] = [A] \cup [C] = \{A, C\}$,
$[non(A \vee C)] = [nonA] \cap [nonC] = \varnothing$,
$[nonnon(A \vee C)] = gh[non(A \vee C)] = gh(\varnothing) = g(\varnothing) = \omega$

となる．

例３　　表７．付値の例（２）

	イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	チ
A	○	○	×	×	×	×	×	×
B	×	○	○	×	×	×	×	×
C	×	×	○	○	×	×	×	×
D	×	×	×	○	○	×	×	×
E	×	×	×	×	○	○	×	×
F	×	×	×	×	×	○	○	×
G	×	×	×	×	×	×	○	○
H	○	×	×	×	×	×	×	○

この例について語群における語のアポーハ代数上の付値を求めてみると，

$[X]=\{X\}$,
$[nonX]=gh[X]=\omega-\{X,X\text{の両サイド}\}$,
$[nonnonX]=gh[nonX]=gh(\omega-\{X,X\text{の両サイド}\})=\{X\}=[X]$,
$[A\vee C]=[A]\cup[C]=\{A,C\}$,
$[non(A\vee C)]=[nonA]\cap[nonC]=\{C,D,E,F,G\}\cap\{E,F,G,H,A\}=\{E,F,G\}$,
$[nonnon(A\vee C)]=gh[non(A\vee C)]=gh(\{E,F,G\})=\{A,B,C\}$

となる．

４　アポーハ代数とグラフ理論

Vを頂点集合とし，$E\subseteq\{(a,b)\mid a,b\in V\}$を辺集合とするとき$(V,E)$をグラフ（graph）という．また，$V=U\cup W, U\cap W=\varnothing, E=\{(a,b)\mid a\in U, b\in W\}$となるとき，$(V,E)$を２部グラフ（bipertite graph）という．アポーハ代数において，$U=\omega, W=S$かつ$E=\{(a,b)\mid a\in\omega, b\in M(a)\}$とすれば，$(V,E)=(\omega\cup S,E)$は2部グラフとなる．この2部グラフをアポーハ代数を表現する2部グラフと，取りあえず名づけておく（茨木他［４］）．

ここで，Gを一般のグラフとするとき，$T\subset V$の近傍（neighborhood）を$nbd(T)=\{v\in V\mid v\notin T, \exists u\in T, (u,v)\in E\}$とおく．さて，$(V,E)=(\omega\cup S,E)$をアポーハ代数を表現する２部グラフとすると，条件（1），（２）はまとめて，２部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$は孤立点を持たないと表現することができる．また，このとき，

$X\in\omega$に対して$M(X)=nbd(X)$,
$X\in\omega$に対して$D(X)=S-nbd(X)$,
$\alpha\subseteq\omega$に対して$h(\alpha)=nbd(\alpha)$
$a\in 2^S$に対して$g(a)=\{X\in\omega\mid nbd(X)\cap a=\varnothing\}$

である．

何故，アポーハ代数を２部グラフで表現するかといえば，語の集合ωと事象の集合Sの対応を記述するために使える語彙が，グラフ理論にまで拡大すると，記述が容易になる場合があるからである．

まず，最初に二重否定について考察しよう．ここで，Wをアポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$の連結成分とするとき，$\varphi(W)=\{A\in\omega\mid A\text{は}W\text{の頂点}\}$とする．ここでまず，$\varphi(W)\in 2^{\omega}$が$\varphi(W)=ghgh(\varphi(W))$となることを示す．次の定理が成り立つ．

定理4.1 $\varphi(W)=ghgh(\varphi(W))$が成り立つ．

証明　$\forall B\in\omega-\varphi(W)$を考える．$B$は連結成分$W$には含まれないので，$h(\varphi(W))\cap M(B)=\varnothing$である．したがって，$\omega-\varphi(W)\subseteq gh(\varphi(W))$が成り立つ．一方，定理2.2によって$\varphi(W)\cap gh(\varphi(W))=\varnothing$であるから，$\omega-\varphi(W)=gh(\varphi(W))$となる．同様にして$gh(\omega-\varphi(W))=\varphi(W)$が成り立つ．これより定理が成り立つ．■

定理4.2 $|\varphi(W)|\geq 2$とする．このとき，$\varnothing\neq U\subsetneq\varphi(W)$で，$U\neq ghgh(U)$と成るものがある．

証明　$\forall A\in\varphi(W)$に対して$U=\varphi(W)-\{A\}$を考える．$|\varphi(W)|\geq 2$かつWは連結であるから，AからUの元に到るパスが存在する．$U=\varphi(W)-\{A\}$であるから，このパスの中で最短のものは長さが2である．このパスのAではない方の端点を$B\ (\in U)$とおく．また，このパスの中間の頂点を$C\ (\in S)$とおくと，$h(\{A\})\cap h(\{B\})\ni C$であるから，$h(\{A\})\cap h(\{B\})\neq\varnothing$となる．したがって，$A\notin gh(U)$となる．

一方，$\omega-\varphi(W)$に属する元はすべて$\varphi(W)$の元とは別の連結成分に属するから，$h(\varphi(W))\cap h(\omega-\varphi(W))=\varnothing$となる．したがって，$gh(\varphi(W))=\omega-\varphi(W)$である．$h(U)\subseteq h(\varphi(W))$より，$gh(U)\supseteq gh(\varphi(W))=\omega-\varphi(W)$．

このことと，$A\notin gh(U)$とを合わせると，$gh(U)=gh(\varphi(W))=\omega-\varphi(W)$となる．一方，$ghgh(\varphi(W))=gh(\omega-\varphi(W))=\varphi(W)$であるから，$ghgh(U)=ghgh(\varphi(W))=\varphi(W)\neq U$となる．■

以上2つの定理をまとめると次の系が得られる．

系4.1 任意の$\Omega\subseteq\omega$に対して$\Omega=ghgh(\Omega)$となる条件は，アポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$の任意の連結成分Tに対して$|\varphi(T)|=1$となることである．

証明　定理4.1，定理4.2より明らかである．■

以上のことだけでは，与えられた$\Omega\in 2^{\omega}$が$\Omega=ghgh(\Omega)$となるかどうかはわからない．このことを考察するために，一般性を失うことなく，アポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$は連結であるとする．

例えば，ブリッジ語群を考えよう．例２はアポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$が$|\omega|=|S|=5$かつ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$はサイクル（cycle）であると言えばすむから，$(V,E)=(\omega\cup S,E)$は連結である．例３は，アポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$が$|\omega|=|S|=8$かつ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$がサイクル（cycle）となるものであるから，$(V,E)=(\omega\cup S,E)$は連結である．一般のブリッジ語群は，アポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$が$|\omega|=|S|=n$かつ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$がサイクル（cycle）となるものか，$|S|=|\omega|+1=n+1$かつ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$がパスとなるもののように単純な構造からなるものもあるが，表５で表したもののようにパスやサイクルにならないものもある．ブリッジ型語群をそのアポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$で特徴づける次の命題が成り立つ．

命題4.1. アポーハ代数がブリッジ型語群となる条件は以下のとおりである．

ωの頂点を全て含むパスあるいはサイクルが存在し，２語３対象の語群に対する任意の長さ4の部分パス（名前を適当に付け替えて，一般性を失うことなくイAロBハとする）に対して，辺$(A,$ハ$),(B,$イ$)$が存在しないことである（これはAロBハAあるいはBイAロBという部分サイクルが2部グラフの中に存在しないということである）．

証明　定理の最初の条件は，ブリッジ型語群の構成要素の２語・３対象の表において，Ａ行からＢ

行に移るとき，ロ列において，A,Bに対応する要素がいずれも○となっていることと，この構成要素を順につないでいくことから分かる．

定理の2つめの条件は，ブリッジ型語群の構成要素，

表８．ブリッジ型語群の構成要素

	イ	ロ	ハ
A	○	○	×
B	×	○	○

を，グラフの言葉で言い換えただけに過ぎない． ■

命題4.1とアポーハ代数の最初に述べた条件（1），（2）から，ブリッジ型語群のアポーハ代数を表現するグラフは連結であることがわかる．

念のために上田［２］で扱われている例について調べてみよう．この例では○，×の他に△（○，×のどちらにも決めがたい）という記号が使われているが，二部グラフの辺の数を減らすために△をすべて×に置き換えておく．このとき語群表は

例４　　表９．語群表（１）

	イ	ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	ト
A	○	○	×	×	○	×	×
B	○	×	○	×	×	×	○
C	×	×	×	○	○	×	○
D	×	×	×	○	○	○	×
E	○	○	×	×	×	×	×

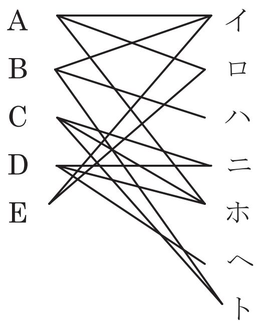

図10．例４の語群表を表現する２部グラフ

となる．図10が上表を表現する２部グラフであるが，見たとおり連結である．

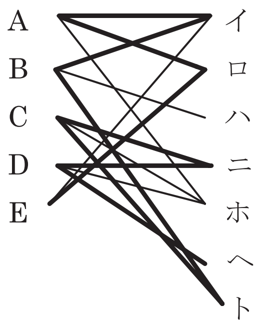

図11．例４の語群表を表現する２部グラフにおけるωの語を全て含むパス

図11のパスにしたがって，上の表を並べ直すと

表12．語群表（２）

	ヘ	ニ	ト	イ	ロ	ハ	ホ
D	○	○	×	×	×	×	○
C	×	○	○	×	×	×	○
B	×	×	○	○	×	○	×
A	×	×	×	○	○	×	○
E	×	×	×	○	○	×	×

となる，この並べ換えではAイEロAという部分サイクルが存在してしまうが，これは２語・３対象を含むパスに関して作られるサイクルではないので，ブリッジ型語群となっているかどうかは判定できない．別の並べ方をチェックする必要がある。すべての並べ方をチェックすると，この例はブリッジ型語群ではないことがわかる．ただし，実際に表で並べかえてチェックするのは，余りに時間がかかる．命題4.1は単にブリッジ型語群の定義を言い換えただけではあるが，2部グラフで命題の条件をチェックした方が，効率的である．しかしいずれにせよ，本質的にはすべての場合をチェックする必要がある．与えられた例がブリッジ型語群かどうかの判定に簡単な判定法があるのか，あるいはこの判定問題はNP完全なのかについては，現段階では未解決問題である．

アポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$が連結なときを考える．$\Omega\subsetneq\omega$が$gh(\Omega)=\varnothing$となるときは，$ghgh(\Omega)=gh(\varnothing)=\omega\neq\Omega$となるから，$gh(\Omega)\neq\varnothing$の場合を考える．このとき次の定理が成り立つ．

定理4.3. $\Omega\subseteq\omega$かつ$gh(\Omega)\neq\varnothing$とする．このとき，$\Omega=ghgh(\Omega)$が成り立つための条件は，$\forall A\in\omega-(\Omega\cup gh(\Omega))$に対して$M(A)\cap h(gh(\Omega))\neq\varnothing$と成ることである．

証明　必要性：対偶を証明する．$A\in\omega-(\Omega\cup gh(\Omega))$で$M(A)\cap h(gh(\Omega))=\varnothing$となるものが存在するとする．すると，$A\in ghgh(\Omega)$となる．$A\notin\Omega$であったから，$\Omega\neq ghgh(\Omega)$となる．十分性：$\forall A\in\omega-(\Omega\cup gh(\Omega))$に対して$M(A)\cap h(gh(\Omega))\neq\varnothing$だから，$(\omega-(\Omega\cup gh(\Omega)))\cap ghgh(\Omega)=\varnothing$である．したがって，$ghgh(\Omega)\subseteq\Omega$となる．一方，定理2.2より$\Omega\subseteq ghgh(\Omega)$であるから，$\Omega=ghgh(\Omega)$が成り立つ．■

$n=5$のパスとなるブリッジ型語群を考えよう．$\omega=\{A,B,C,D,E\},S=\{$イ,ロ,ハ,ニ,ホ,ヘ$\}$とする．ここで$\Omega=\{A,B,C,D\}$とすると，$gh(\Omega)=\varnothing$であるから$ghgh(\Omega)=\omega\neq\Omega$である．次に，$\Omega=\{B\}$とすると，$gh(\Omega)=\{D,E\}$となり，$ghgh(\Omega)=\{A,B\}\neq\Omega$となる．また，$\Omega=\{A,B\}$とすると，$gh(\Omega)=\{D,E\}$と

なり$ghgh(\Omega)=\{A,B\}=\Omega$となる.

次に，$n=6$のサイクルとなるブリッジ型語群を考えよう．$\omega=\{A,B,C,D,E,F\}, S=\{イ,ロ,ハ,ニ,ホ,ヘ\}$とする．ここで$\Omega=\{A,C,E\}$とすると，$gh(\Omega)=\varnothing$であるから$ghgh(\Omega)=\omega\neq\Omega$である．次に，$\Omega=\{A,C\}$とすると，$gh(\Omega)=\{E\}$となり，$ghgh(\Omega)=\{A,B,C\}\neq\Omega$ となる．また，$\Omega=\{A,B\}$とすると，$gh(\Omega)=\{D,E\}$となり，$ghgh(\Omega)=\{A,B\}=\Omega$となる.

最後に，排中律が成り立つ条件について考える．一般のアポーハ代数を表現する2部グラフ$(V,E)=(\omega\cup S,E)$に話を戻す.

系4.2. $\Omega\subseteq\omega$が$\omega-\Omega=gh(\Omega)$となる条件は，Ωが$(V,E)=(\omega\cup S,E)$のいくつかの連結成分$T_1,\ldots,T_k$が存在して，$\Omega=\varphi(T_1\cup\ldots\cup T_k)$となることである.

証明　連結成分が１つの場合には，定理4.1の証明ですでに証明されている．連結成分が2つ以上ある場合を考える．再度，定理4.1の証明をみると，結局証明は連結成分毎に行えばよいということが分かるから，定理は成り立つ.　■

系4.3. 任意の$\Omega\subseteq\omega$が$\omega-\Omega=gh(\Omega)$となる条件は，$(V,E)=(\omega\cup S,E)$の任意の連結成分Tに対して，$|\varphi(T)|=1$となることである.

証明　明らか.　■

５　終わりに

仏教哲学あるいは新因明の立場をきちんと論理学的に展開をしているものには末木［６］があるが，アポーハ論は取り上げていない．アポーハ論についての研究は殆どは文献学的な研究である．論理学的なアプローチはほとんどないが，Herzberger［10］は例外的に論理学的なものである．本論文では，アポーハを仏教学から切り離して，論理学的構造だけを取り出すとどうなるかについて考察した.

そもそも論理学の基本原理は

（１）同一律（２）矛盾律（３）排中律である．数学では同一律は自明なこととして素通りしてしまうが，哲学においては，そこに深い意味を見いだす．しかし，今はそのことに触れている余裕はない.

いま，もう少し基本原理について述べると，

（１）矛盾律：命題Aとその否定命題$nonA$が同時に真であることはない．言い換えると，$A\wedge nonA$は偽（真でない）.

（２）排中律：命題Aとその否定命題$nonA$のいずれかは真である。言い換えると，$A\vee nonA$は真.

（３）二重否定（二重否定除去）：否定の否定は除去できる。言い換えると，$nonnonA$はAと同値.

それぞれの原理に対応するアポーハ代数的表現は，

（４）矛盾律：$[A]\cap gh[A]=\varnothing$　（定理2.1）.

（５）排中律：$[A\vee nonA]=[A]\cup gh[A]=\omega$　（最大元）　不成立.

（６）二重否定：$ghgh[A]=[A]$　不成立となる.

本論文ではアポーハ代数において排中律と二重否定が成り立つ条件について考察した．ここで得られた結果から見ると，それらはほぼ自明な場合に限られる．これは有る意味当然のことである．そもそも，龍樹の「中観哲学」においてすでに排中律は成り立っていないし，ディグナーガが属する唯識学派は「中観哲学」の後に続くものだからである.

しかし，アポーハを仏教哲学の外に取り出してみると，これは現代論理学の研究対象としては重要な示唆を与える可能性を秘めている．小野［３］を見ても分かるように，Brauwerの直観論理が排

中律を否定している．排中律を否定してしまうと，背理法は使えなくなるので，数学においてはかなりの定理の証明が無効となってしまう．そのためもあるが，Hilbert は形式主義を唱えることとなったわけである．しかし直観論理は，完備ハイティング代数であることと同値であることが分かってからは，工学分野での応用もできるようになっている．この文脈でアポーハを見ると，未解決問題が山積していることが分かる．最重要なものの一つとしてはアポーハ代数とハイティング代数の関連を見きわめることであろう．

謝辞

第二著者は，龍澤寺専門僧堂の後藤榮山老大師に学恩を深く感じている．これは言ってみれば妙な話なのであるが，ともかく老大師によって，筆者が何を証明したことになるのかが筆者自身はっきりした．そうでなければ，単なる数学ゲームに陥ってしまっていただろう．ともかく，アポーハの仏教哲学における位置づけ，およびその哲学的取り扱いに目を開かせてくれたことは間違いない．また，Wittgenstein の重要性について聞いたのも老大師からである．感謝に堪えない．

また，査読者には有益な指摘をいただきました．ここに感謝申し上げます．

【注】

注１：J.Trier はソシュールの言語思想の影響を受けて，意味場の理論を唱えた．Trier（*Der deutsche Wortschatz im Sinnbezirk des Verstandes*［悟性の意味領域におけるドイツ語彙］，1931［11］）は知識を表現する13世紀初頭のドイツ語の語彙Kunst（芸術），List（技巧），Wîsheit（知恵）の百年後の語彙Kunst, Wizzen, Wîsheit への変遷を分析している．（Cf. ピエール・ギロー『意味論』（佐藤信夫訳）白水社1958. p.90ff.［5］）　このような実証的研究を基礎にしてTrier は次のように「野」すなわち意味場について述べている．「個々の記号が何かをいうというのではない．記号全体の組織だけが，個々の記号に対して何かをいいうるのである．このように，語は同じ概念の「野」ののこりの語とむすびつきあって，自律性をもった一つの全体となり，この全体からその表示の及ぶ範囲が得られる．或る語の通用価値（Geltung）は，それに隣接し，またそれに対立する語の通用価値に対して限定するときにはじめてよくわかるようになる．全体の部分としてのみその語は意味をもつ．なぜなら「野」の中にしか，意味するということは存在しないらである．」（J.Trier, Über Wort- und Begriffsfelder，福本・寺川編訳『現代ドイツ意味理論の源流』大修館1975 所収p.156［12］）

注２：「代数」というときには，考えている対象が多元環の構造を持つ場合をいうことが多いが，ここでは，ある特定の演算に対して閉じている場合を指して「代数（algebra）」ということにする．

【参考文献】

［１］上田昇著，『ディグナーガ，論理学とアポーハ論ー比較論理学的研究ー』，山喜房佛書林，2001年．

［２］上田昇著，“「いき」の構造のアポーハ論的構造”，印度学仏教学研究，58–1, 2009年．

［３］小野寛晰著，『情報科学における論理』，日本評論社，1994年．

［４］茨木俊秀，石井利昌，永持仁著，『グラフ理論―連結構造とその応用』，基礎数理講座（5），朝倉書店，2010年．

［５］ピエール・ギロー著，佐藤信夫訳，『意味論』，白水社，1958 年．

［６］末木剛博著，『東洋の合理思想』，増補新版，法蔵館，2001年．

［７］野林正路著，『意味をつぐむ人びと―構成意味論・語彙論の理論と方法―』，海鳴社，1986年．

［８］山内得立著，『ロゴスとレンマ』，岩波書店，1974 年．

［９］Ganter, Bernhard und Wille, Rudolf, *Formale Begriffsanalyse -Mathematische Grundlagen-*, Springer, 1996.

［10］Herzberger, Radhika, *Bhartṛhari and the Buddhists*, D.Reidel Publishing Company, 1986.

［11］Trier, Jost, *Der deutsche Wortschatz im Sinnbezirk des Verstandes*,（dissertation）, 1931.

［12］Trier, Jost, “Über Wort - und Begriffsfelder”, In: Schmidt, L. [Hrsg.]: *Wortfeldforschung. Zur Geschichte und Theorie des sprachlichen Feldes*, Darmstadt 1973, pp. 1–38.（[「語の野」と「概念の野」について]，野本，寺川編訳，『現代ドイツ意味理論の源流』，大修館，1975年）.

［13］Wittgenstein, Ludwig Josef Johann, *Logisch-philosophische Abhandlung／Tractatus Logico -Philosophicus*, 1918（Routledge und Kegan Paul），1971.（坂井英寿訳，『論理学論考』所収，法政大学出版局，1968 年，奥雅博訳，『ウィトゲンシュタイン全集 1 』所収，大修館，1975年，山元一郎訳『ウィトゲンシュタイン論理哲学論』，中公クラシックス，中央公論出版社，2001年，黒崎宏訳，『『論考』『青色本』読解』所収，産業図書，2001年.）